

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до лабораторних, самостійних
та розрахунково-графічних робіт
із дисципліни

«СУПУТНИКОВА ГЕОДЕЗІЯ ТА СФЕРИЧНА
АСТРОНОМІЯ»

*(для студентів денної і заочної форм навчання напряму підготовки
6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

Методичні вказівки і завдання до лабораторних, самостійних та розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Супутникова геодезія та сферична астрономія» (для студентів денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. С. А. Отечко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 58 с.

Укладач канд. географ. наук С. А. Отечко

Рекомендовано кафедрою геоінформаційних систем, оцінки землі та нерухомого майна, протокол № 1 від «29» серпня 2015 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ.....	5
1.1 Лабораторна робота 1. Системи координат супутникової геодезії ..	5
1.2 Лабораторна робота 2. Визначення координат супутника за елементами його орбіти	11
1.3 Лабораторна робота 3. Визначення елементів незбуреної орбіти супутників	15
1.4 Лабораторна робота 4. Підготовка даних для спостереження супутника	20
1.5 Лабораторна робота 5. Визначення полярного стиснення Землі методами супутникової геодезії	26
2 ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ.....	30
2.1 Розрахунково-графічна робота 1. Навігація з використанням супутникових приймачів	30
2.2 Розрахунково-графічна робота 2. Геодезичні знімання за допомогою супутникових приймачів	38
3 САМОСТІЙНА РОБОТА.....	55
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	57

ВСТУП

Галузевий стандарт освіти за напрямом «Геодезія, картографія та землеустрій» передбачає вивчення «Супутникової геодезії та сферичної астрономії» як одної із базових дисциплін для формування фахівців цього напрямку.

В даний час методами супутникової геодезії розв'язують практичні задачі, пов'язані з побудовою на земній поверхні опорних геодезичних мереж, картографуванням земної поверхні, дослідженням гравітаційного поля Землі, вивченням фігури Землі і її динамічних характеристик.

Теорія супутникової геодезії базується на знаннях, отриманих при вивченні вищої математики, фізики, вищої геодезії.

Методичні вказівки містять структуру, зміст і лабораторні завдання з дисципліни «Супутникова геодезія та сферична астрономія», що сприяє поглибленому вивченню студентами окремих розділів дисципліни, закріпленню і систематизації набутих знань і умінь, а також дає змогу перевірити якість їх засвоєння.

Лабораторні роботи, що входять до даних методичних вказівок, стосуються тих чи інших навчальних елементів:

- системи координат і часу супутникової геодезії;
- орбіти супутників і їх елементи;
- теорія руху супутника по незбуреній і збуреній орбітах;
- способи визначення координат супутника;
- способи визначення координат точок на земній поверхні;
- побудова геодезичних мереж методами супутникової геодезії.

Лабораторні роботи студенти виконують індивідуально. За результатами виконання цих робіт оформляється звіт по кожній роботі. Структура звіту рекомендується такою:

- назва роботи і мета її виконання;
- формулювання завдання, що підлягає виконанню;
- вихідні дані для роботи;
- основні теоретичні положення, на яких базується виконання даної роботи;
- методика виконання роботи, отримані результати та висновки.

Укладання даних методичних вказівок базувалось в тому числі на результатах науково-методичної роботи К. М. Антоновича [1], Р. Г. Пилип'юк, Р. Р. Пилип'юк [4].

1 ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

1.1 Лабораторна робота 1. Системи координат супутникової геодезії

Мета роботи – засвоїти суть систем координат, що застосовуються в супутниковій геодезії і зв'язки між ними.

Завдання – дослідити зміну початків систем координат і напрямків координатних осей при переході з однієї системи координат до іншої.

Основні теоретичні положення

Системи координат, що застосовуються в супутниковій геодезії поділяють на дві групи: лінійні і сферичні. За розміщенням початків систем координат – розрізняють: геоцентричні – в яких початок координат співпадає з центром мас Землі; референсні – початок координат в яких співпадає з геометричним центром референц-еліпсоїда; геліоцентричні – початок координат співпадає з центром мас Сонця; топоцентричні – початок координат співпадає з точкою спостереження на земній поверхні.

В залежності від вибору основної координатної площини розрізняють: екваторіальну систему координат, в якій основна координатна площина співпадає з площиною земного або небесного екватора; горизонтальну (горизонтну) систему координат, в якій основна координатна площина співпадає з площиною небесного або місцевого горизонту; екліптичну систему координат, в якій основна координатна площина розміщена в площині екліптики; орбітальну систему координат, в якій основна координатна площина знаходиться в площині орбіти об'єкта.

В супутниковій геодезії найбільше поширеними є наступні системи координат: геоцентрична просторова прямокутна система координат XYZ , геодезична система координат, топоцентрична система координат, перша і друга екваторіальні системи координат.

В геоцентричній екваторіальній системі координат початок цієї системи співпадає з центром мас Землі, а напрямки координатних осей задається відносно характерних точок земної поверхні або небесної сфери.

Нехай вісь Z геоцентричної екваторіальної системи координат направлена в точку північного полюса Землі P_o (точка P_o відповідає середньому положенню полюса Землі на певну епоху), а вісь X направимо в точку перетину меридіана Грінвіча з площиною екватора G_e (рис. 1.1). Тоді отримують систему *геоцентричних екваторіальних координат* XYZ , яка, приймаючи участь в добовому обертанні Землі, залишається незмінною щодо точок земної поверхні. Цю систему координат доцільно використовувати для визначення положень точок земної поверхні і дослідження фігури Землі.

система просторових прямокутних координат $X'Y'Z'$ отримала назву *топоцентричної горизонтальної (горизонтної) системи координат* (рис. 1.1).

Відомо, що фігура реальної Землі – геоїд за своєю конфігурацією близька до фігури, яку утворює еліпсоїд, параметри і орієнтування якого в тілі Землі задаються. Тоді доцільно визначати положення точок на поверхні такого еліпсоїда за допомогою *геодезичних координат*.

Проведемо в точці Q земної поверхні нормаль до поверхні еліпсоїда Qn (рис. 1.2). Гострий кут, утворений нормаллю з площиною екватора, називається *геодезичною широтою* і позначається літерою B . Прийнемо меридіан PGG_0P' , що відповідає Грінвіцькому геодезичному меридіану за початковий. Тоді двогранний кут при полюсі P , утворений цим меридіаном і геодезичним меридіаном даної точки PQ_eQ_0P' , називається *геодезичною довготою* і позначається літерою L . Геодезичні координати B і L однозначно визначають положення точки Q_e на поверхні еліпсоїда.

Положення точки Q відносно поверхні еліпсоїда визначається відрізком нормалі QQ_e , який отримав назву *геодезичної висоти* точки H . Координати B, L, H і складають *геодезичну систему координат*.

Оскільки штучні супутники Землі є рухомими об'єктами, то при визначенні їх положення в просторі обов'язково фіксують час спостереження, який вважають четвертою координатою супутника.

В супутниковій геодезії для встановлення часу спостереження найчастіше користуються двома системами визначення часу – *зоряною* і *середньою*.

За одиницю зоряного часу приймають *зоряну добу*. Зоряною добою називають проміжок часу між двома послідовними одноіменними кульмінаціями точки весняного рівнодення на меридіані точки спостереження. *Місцевим зоряним часом* називають величину годинного кута точки весняного рівнодення на момент спостереження.

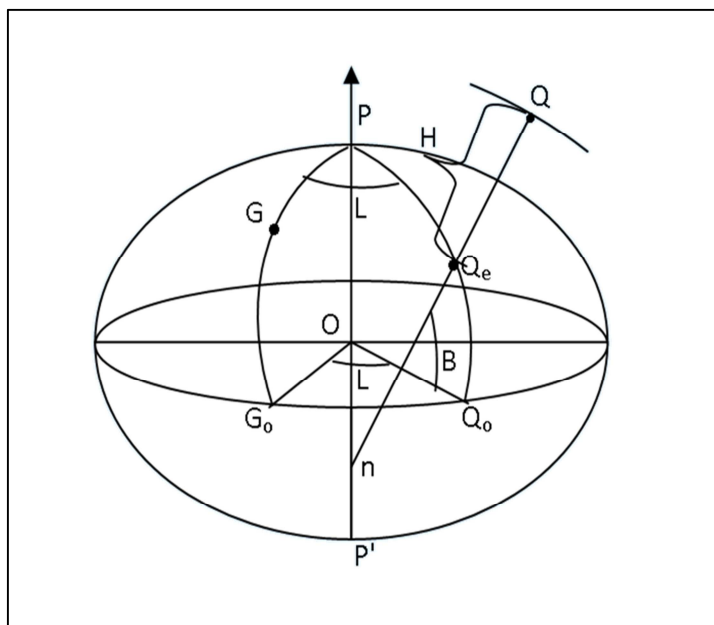


Рисунок 1.2 – Геодезична система координат

Одиниця середнього часу – доба встановлюється за спостереженнями фіктивної точки небесної сфери, що отримала назву *середнього екваторіального Сонця*. *Середньою добою* називають проміжок часу між двома послідовними одноіменними кульмінаціями середнього екваторіального Сонця на меридіані точки спостереження. *Місцевим середнім часом* називають величину годинного кута середнього екваторіального Сонця. Місцевий середній час на меридіані Грінвіча отримав назву *всесвітнього часу* і позначається UT (Universal Time).

Виконання роботи

Умова завдання

В точці спостереження Q (рис. 1.3) з відомими геодезичними координатами B, L, H проведено спостереження супутника, для якого визначено на момент T_o (UT) топоцентричні координати r_t, α_t, δ_t .

Завдання – визначити для супутника на заданий момент часу геоцентричні просторові координати X_h, Y_h, Z_h і геоцентричні сферичні координати α_h, δ_h, r_h .

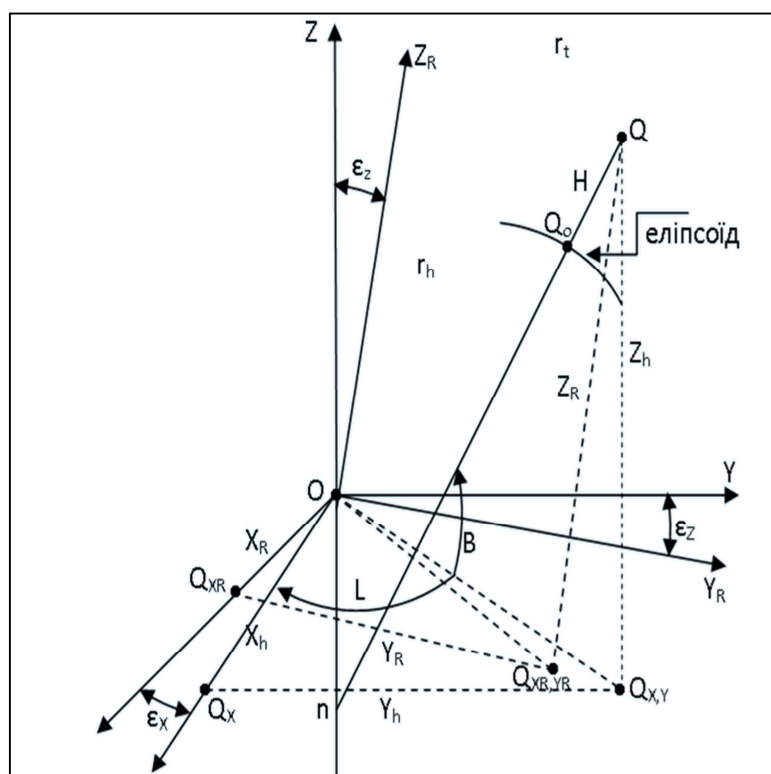


Рисунок 1.3 – Умова завдання

Вихідні дані

а) референсні геодезичні координати точки спостереження

$$B = 48^{\circ}37'43.''27 + n',$$

$$L = 1^h38^m52.^s96 + n'',$$

$$H = (257 + n) \text{ м},$$

де n - коефіцієнт, заданий викладачем.

б) топоцентричні координати супутника

$$r_t = 800 \text{ км} + n \text{ км},$$

$$\alpha_t = 3^h 07^m 36.^s 085 + n^h,$$

$$\delta_t = 43^\circ 19' 28.'' 56 + n'.$$

в) момент спостереження за всесвітнім часом

$$T_o = 19^h 22^m 49.^s 50 + n^m.$$

г) зоряний час у Грінвічі на початок доби спостереження

$$S_o = 20^h 36^m 38.^s 60.$$

д) кути повороту координатних систем (кути Ейлера)

$$\varepsilon_x = 0.''8,$$

$$\varepsilon_y = 1.''9,$$

$$\varepsilon_z = 2.''5.$$

Прийняти, що центри геоцентричної і референтної систем координат співпадають, а референц – еліпсоїд Красовського характеризується такими параметрами:

велика піввісь $a = 6378245$ м,

перший ексцентриситет $e^2 = 0.0066934$.

Алгоритм розв'язку завдання

1. За відомими геодезичними координатами точки спостереження обчислюємо просторові референтні прямокутні координати X_R, Y_R, Z_R , користуючись формулами:

$$\begin{aligned} X_R &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y_R &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z_R &= (N(1 - e^2) + H) \sin B, \end{aligned} \quad (1)$$

де N – радіус кривини першого вертикала, що визначається формулою

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}, \quad (2)$$

2. Перетворюємо декартові референтні координати X_R, Y_R, Z_R в геоцентричні координати X_h, Y_h, Z_h точки спостереження. Відомо, що перетворення координат з однієї системи координат в іншу здійснюються за формулами:

$$\begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} = MR \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де M – матриця масштабних множників, яку при переобчисленнях сучасних систем координат можна вважати одиничною, тобто $M = I$, а матриця перетворення R визначається так:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

3. Переобчислюють момент спостереження, заданий грінвіцьким часом T_0 у відповідний йому зоряний час.

Маємо:

$$S = S + T_0 + \mu T_0, \quad (5)$$

де $\mu = 9,856 \left(\frac{s}{h} \right)$ – коефіцієнт переходу від середніх до зоряних одиниць часу.

4. Обчислюють для супутника топоцентричні декартові координати x_t, y_t, z_t за відомими значеннями його сферичних координат.

Знаходимо:

$$\begin{aligned} x_t &= r_t \cos \delta_t \cos(\alpha_t - s), \\ y_t &= r_t \cos \delta_t \sin(\alpha_t - s), \\ z_t &= r_t \sin \delta_t. \end{aligned} \quad (6)$$

5 Розраховують геоцентричні прямокутні координати супутника

$$\begin{aligned} X_{zc} &= X_h + x_t, \\ Y_{zc} &= Y_h + y_t, \\ Z_{zc} &= Z_h + z_t. \end{aligned} \quad (7)$$

6 Обчислюють прямокутні геоцентричні координати супутника у його геоцентричні сферичні координати за формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_{zc} &= \arctg \frac{Y_{zc}}{X_{zc}} + S, \\ \delta_{zc} &= \arctg \frac{Z_{zc}}{\sqrt{X_{zc}^2 + Y_{zc}^2}}, \\ r_{zc} &= \frac{Z_{zc}}{\sqrt{X_{zc}^2 + Y_{zc}^2 + Z_{zc}^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

7 За взірцем рисунка 1.2 побудувати точку, що відповідає місцеположенню супутника, використавши розраховані координати X_{zc}, Y_{zc}, Z_{zc} . На створеному рисунку показати сферичні координати супутника. З аналізу встановити, в якій

частині небесної сфери спостерігався супутник, і на якій висоті над земною поверхнею він знаходився в момент спостереження.

Всі лінійні величини обчислюють з точністю до 0.1 м, а сферичні величини α і δ – до 0.1 секунди.

Контрольні запитання

1. Як класифікують системи координат за розміщенням точки початку координат?
2. Як класифікують системи координат за розміщенням основної координатної площини?
3. Як направляють осі координат в геоцентричній екваторіальній системі координат?
4. Дайте визначення референційній системі координат.
5. Що характеризують кути Ейлера?
6. Суть геодезичної системи координат.
7. Дайте визначення геодезичній широті і геодезичній довготі.
8. Дайте визначення топоцентричній системі координат.
9. Дайте визначення геодезичній висоті точки.
10. Дайте визначення поняттю «всесвітній час».
11. Що називають зоряною добою, і що є мірою зоряного часу?
12. Що називають середньою добою, і що є мірою середнього часу?

1.2 Лабораторна робота 2. Визначення координат супутника за елементами його орбіти

Мета роботи полягає у засвоєнні методики обчислення просторових координат супутника за відомими елементами його орбіти.

Завдання полягає у визначенні просторових прямокутних координат і просторових сферичних координат супутника за даними, що характеризують як саму орбіту супутника, так і положення супутника на цій орбіті, а також проведенні дослідження розміщення супутника в просторі за цими даними.

Основні теоретичні положення

Елементи орбіти – це параметри, що характеризують вид і розміри самої орбіти, її орієнтацію в просторі, положення супутника на орбіті в той чи інший момент часу.

Вид орбіти визначається першим законом Кеплера, і це може бути довільна крива другого прядку: коло, еліпс, парабола чи гіпербола.

Для характеристики розміру і виду орбіти використовують два параметри: велику піввісь орбіти « a » і ексцентриситет орбіти « e ».

Орієнтування орбіти в просторі здійснюють відносно площини небесного екватора, який приймають за основну координатну площину XOY , і точки весняного рівнодення γ , в яку направлена вісь X просторової геоцентричної системи координат XYZ (рис. 1.4).

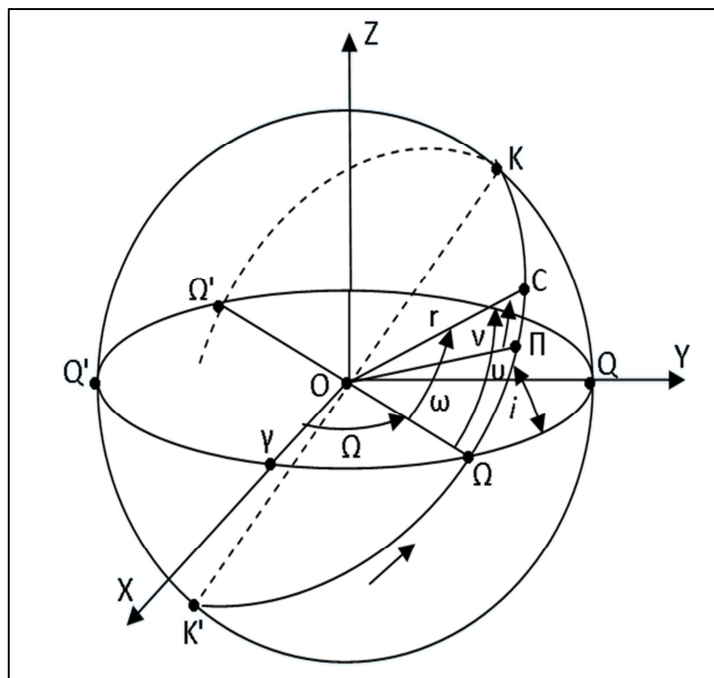


Рисунок 1.4 – Елементи орбіти

Лінія перетину $\Omega K \Omega'$ площини орбіти $\Omega K \Omega' K'$ з площиною небесного екватора $Q \Omega' Q' \Omega$ називається *лінією вузлів орбіти*. Точка Ω цієї лінії, в якій супутник, що рухається по орбіті проти ходу годинникової стрілки переходить з південної півкулі небесної сфери у північну, отримала назву *висхідного вузла орбіти*. Точку Ω' цієї лінії називають точкою *нисхідного вузла орбіти*. Дугу небесного екватора $\gamma \Omega$ і відповідний їй центральний кут $\gamma O \Omega$ називають *довготою висхідного вузла орбіти* і позначають літерою Ω . Кут, який складає площина орбіти супутника $\Omega K \Omega' K'$ з площиною небесного екватора $Q \Omega' Q' \Omega$ називають *кутом нахилу орбіти* i . Кути Ω і i – це елементи орбіти супутника, що визначають її положення в просторі.

Для визначення положення супутника на орбіті використовують три кутові елементи, що отримали назву *істинної аномалії* v , *висоти (аргументу) перигею* ω , *аргументу широти* u . Істинною аномалією v (сферична віддаль $ПС$, рис. 1.1), називають величину кута $ПОСБ$ що відраховується від напрямку на точку перигею P орбіти до напрямку радіуса – вектора супутника r проти ходу годинникової стрілки. Кут істинної аномалії може приймати значення від 0° до 360° . *Висотою перигею* ω (сферична віддаль ΩP , рис. 1) називають кут $\Omega O P$, відрахований від точки висхідного вузла Ω до напрямку на точку

перигею P в площині орбіти супутника. Аргументом широти u називають кут ΩOC , утворений напрямком на точку висхідного вузла Ω і радіусом – вектором супутника $r = OC$.

Виконання роботи

Вихідні дані:

1. Велика піввісь орбіти $a = 8000 \text{ км} + 100n \text{ км}$; ($a = 8000 \text{ км} + 10n \text{ км}$)
2. Ексцентриситет орбіти $e = 0,017 + 0,01n$; ($e = 0,017 + 0,002n$)
3. Довгота висхідного вузла $\Omega = 35^\circ 20' + (1.5n)'$;
4. Нахил орбіти $i = 60^\circ 37' + (2n)'$;
5. Висота перигею $\omega = 22^\circ 15' + (3n)'$;
6. Час проходження супутника через точку перигею $\tau = 8^h 33^m 10^s + n^m$;
7. Час спостереження супутника $s = 10^h 08^m 27^s + n^m$;

У вихідних даних n – індивідуальний коефіцієнт студента, який задає викладач.

Завдання:

Розрахувати просторові геоцентричні прямокутні координати супутника X, Y, Z і його сферичні екваторіальні координати α і δ . За розрахованими і вихідними даними побудувати зображення орбіти супутника і відобразити положення супутника на цій орбіті.

Алгоритм розв'язку завдання

1. За параметрами орбіти визначають середній рух супутника.

Маємо:

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{s^2}}, \quad (9)$$

де μ – гравітаційний параметр, який вважають постійною величиною, і яка має таке значення: $\mu = f * M = 398600 \text{ км}^3/\text{с}^2$

2. Обчислюють середню аномалію

$$M = n(s - \tau). \quad (10)$$

3. З рівняння Кеплера $E - e \sin E = M$ методом послідовних наближень визначають ексцентричну аномалію E . Приймають в першому наближенні, що $E_1 = M$. Тоді для другого наближення маємо:

$$E_2 = M + e \sin M,$$

для третього

$$E_3 = M + e \sin E_2 \text{ і т.д.} \quad (11)$$

Необхідно виконати не менше трьох наближень.

4. Визначають істинну аномалію супутника за формулою:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (12)$$

де E в формулі (12) відповідає значенню E_3 з формули (11).

5. Розраховують геоцентричний радіус – вектор супутника r .

Маємо:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+\cos \nu}. \quad (13)$$

6. Визначають геоцентричні прямокутні координати супутника X, Y, Z за формулами:

$$\begin{aligned} X &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ Y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ Z &= r \sin u \sin i \end{aligned} \quad (14)$$

де $u = \omega + \nu$.

7. За топоцентричними координатами X, Y, Z обчислюють сферичні екваторіальні координати α і δ . Користуємось формулами:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \frac{Y}{X}, \\ \delta &= \arctan \frac{Z}{(X^2 + Y^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Щоб правильно обчислити пряме сходження α необхідно врахувати знаки координат.

8. За вихідними і розрахованими даними будують зображення орбіти для заданого супутника і вказують на рисунку місце розміщення його на момент спостереження.

Всі обчислення кутових величин виконують з точністю до 1° , а лінійних – до 1 метра.

У висновку до роботи необхідно відобразити ті знання, які студент набув, виконуючи дану роботу.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте закони Кеплера руху штучних супутників Землі.
2. Які точки орбіти називаються вузловими? Їх назва і визначення.
3. Який рух супутника називають середнім?
4. Дайте визначення поняттям істинної аномалії, ексцентричної аномалії, середньої аномалії.
5. Чи можна за ексцентриситетом орбіти визначити її вид? Наведіть приклади.
6. Ексцентриситет орбіти $e=1$. Який вид має ця орбіта?
7. Яку залежність встановлює рівняння Кеплера?
8. Швидкість руху супутника по орбіті характеризує середній рух n . Який вид має ця орбіта?
9. Який параметр орбіти визначає положення на орбіті точки перигею?
10. Чи пройшов супутник точку апогею, якщо його істинна аномалія $\nu=185^\circ$? Поясніть відповідь.

1.3 Лабораторна робота 3. Визначення елементів незбуреної орбіти супутників

Мета роботи – засвоїти методику визначення елементів орбіти супутника за його геоцентричними сферичними координатами в двох точках спостереження.

Завдання – розрахувати всі параметри, що характеризують розміри і вид орбіти, її положення в просторі, а також положення супутника на орбіті.

Основні теоретичні положення

В небесній механіці задача з визначення елементів орбіти за результатами спостережень супутників на орбіті називається оберненою задачею. Нехай в двох точках орбіти C_1 і C_2 в моменти s_1 і s_2 спостерігався супутник (рис. 1.5).

За результатами цих спостережень визначено його геоцентричні сферичні координати, відповідно: r_1, α_1 і δ_1 – в точці спостереження C_1 і r_2, α_2 і δ_2 – в точці спостереження C_2 .

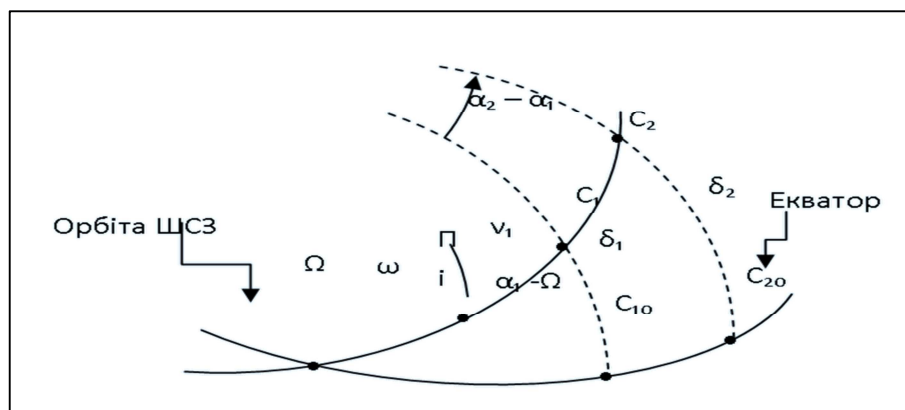


Рисунок 1.5 – Зв’язок екваторіальних координат супутника з елементами орбіти

Розв’язуючи прямокутні сферичні трикутники $C_1\Omega C_{10}$ і $C_2\Omega C_{20}$ за правилом Непера, отримаємо:

$$\begin{aligned} \tan i &= \tan \delta_1 \sec(\alpha_1 - \Omega), \\ \tan i &= \tan \delta_2 \csc(\alpha_2 - \Omega). \end{aligned} \quad (16)$$

Перетворюючи ці рівняння, знаходимо:

$$\tan(\alpha_1 - \Omega) = \frac{\tan \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\tan \delta_2 - \tan \delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (17)$$

Формули (17) і (16) дозволяють розрахувати параметри орбіти - довготу висхідного вузла Ω і кут нахилу орбіти i , які і визначають положення орбіти супутника в просторі.

З розв’язку цих же сферичних трикутників визначають сферичні відстані ΩC_1 і ΩC_2 , які є характеристикою аргументів широти точок спостереження C_1 і C_2 . Маємо:

$$\begin{aligned} \cos u_1 &= \cos \delta_1 \cos(\alpha_1 - \Omega), \\ \cos u_2 &= \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \Omega). \end{aligned} \quad (18)$$

Для розрахунку наступних параметрів орбіти супутника використовують допоміжну величину, що називається фокальним параметром p і визначається відношенням інтеграла площі s до гравітаційного параметра μ . Для практичного обчислення фокального параметра використаємо формулу Гауса

$$p = \frac{(r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1))^2}{\mu (S_2 - S_1)^2}, \quad (19)$$

де S_1 і S_2 - моменти спостереження супутника в заданих точках орбіти.

Знання величини фокального параметра дозволяє визначити істинну аномалію супутника у відповідних точках спостереження. Маємо:

$$\tan v_1 = \frac{\frac{p-r_1}{r_1} \cos(u_2 - u_1) - \frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_2}{r_1} \sin(u_2 - u_1)} \quad (20)$$

$$i \quad v_2 = v_1 + (u_2 - u_1).$$

За відомими значеннями величин істинної аномалії для супутника в точках спостереження розраховуємо значення ексцентриситету орбіти

$$e = \frac{p-r_1}{r_1 \cos v_1} = \frac{p-r_2}{r_2 \cos v_2} \quad (21)$$

і висоти (аргументу) перигею

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2. \quad (22)$$

Для визначення великої півосі орбіти супутника і його середнього руху застосуємо формули:

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

i

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a^3}}. \quad (23)$$

Розраховані параметри дозволяють визначити як вид орбіти і її розміри (велика піввісь a і ексцентриситет e), так і положення супутника на орбіті в точках спостереження (істинні аномалії v_1 і v_2). Середній рух n характеризує швидкість руху супутника по коловій орбіті радіуса a .

Визначені параметри орбіти дозволяють обчислити допоміжну величину, що отримала назву ексцентричної аномалії E . Для цього застосовують формулу

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}. \quad (24)$$

Застосуємо рівняння Кеплера для обчислення моменту проходження супутника через точку перигею τ . Маємо:

$$\tau = S_1 - \frac{E_1 - e \sin E_1}{n} = S_2 - \frac{E_2 - e \sin E_2}{n}. \quad (25)$$

Середня аномалія супутника на середній момент спостереження визначається із формули

$$M = n(S_0 - \tau). \quad (26)$$

Виконання роботи

Вихідні дані

1. Топоцентричні координати супутника в першій точці спостереження:

а) топоцентрична віддаль до супутника $r_1 = 8546/7$ км ;

б) геоцентричне пряме сходження $\alpha_1 = 3^h 07^m 06^s.2$;

в) геоцентричне схилення $\delta_1 = 41^\circ 37' 52''.80$;

г) момент спостереження $S_1 = 16^h 19^m 27^s$.

2 Топоцентричні координати супутника в другій точці спостереження:

а) топоцентрична віддаль до супутника $r_2 = r_1 + 11n$ км;

б) геоцентричне пряме сходження $\alpha_2 = \alpha_1 + 5n^m$;

в) геоцентричне схилення $\delta_2 = \delta_1 + 5n'$;

г) момент спостереження супутника $S_2 = S_1 + n^m$.

Коефіцієнт n задається викладачем індивідуально для кожного студента.

Завдання:

За вихідними топоцентричними координатами супутника у двох точках спостереження розрахувати всі параметри, що характеризують орбіту по якій рухається супутник і, враховуючи розраховані дані, побудувати зображення орбіти супутника.

Алгоритм розв'язку завдання

1. Використовуючи екваторіальні координати супутника α і δ , на основі формули (17), обчислюють довготу висхідного вузла орбіти Ω . Маємо:

$$\Omega = \alpha_1 - \arctan \left(\frac{\tan \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\tan \delta_2 - \tan \delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \right).$$

2. Застосовуючи формули (16), визначають кут нахилу орбіти до екватора. Знаходимо:

$$i = \arctan\left(\frac{\tan \delta_1}{\sin(\alpha_1 - \Omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\tan \delta_2}{\sin(\alpha_2 - \Omega)}\right).$$

3. Для точок спостереження супутника C_1 і C_2 (рис. 1.5), на основі формули (18), розраховують значення аргументу широти

$$u_i = \arccos(\cos \delta_i \cos(\alpha_i - \Omega)).$$

4. Обчислюють фокальний параметр p , використовуючи для цього формулу (19). При обчисленні за цією формулою різницю часу ($S_2 - S_1$) необхідно виразити в секундах часу.

5. Розрахунок істинної аномалії супутників в точках спостереження ν_1 і ν_2 здійснюють за формулою (20), записавши її наступним чином:

$$\nu_1 = \arctan\left(\frac{\frac{p-r_1}{r_1} \cos(u_2 - u_1) - \frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_1}{r_1} \sin(u_2 - u_1)}\right)$$

і

$$\nu_2 = \nu_1 + (u_2 - u_1).$$

6. Розраховують ексцентриситет орбіти супутника і висоту перигею цієї орбіти, користуючись формулами (21) і (22).

7. Використовуючи формулу (23), обчислюють значення великої півосі орбіти a і середній рух супутника n .

8. Ексцентричну аномалію для точок спостереження супутника розраховують на основі формули (24). Маємо:

$$E_i = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu_i}{2}\right).$$

При обчисленнях ексцентричної аномалії E необхідно враховувати знак істинної аномалії ν . Цей знак встановлює напрям відрахування цієї величини від напрямку на точку перигею орбіти. При додатному знаку вказаний кут

відкладається від точки перигею проти ходу годинникової стрілки, а при від'ємному знаку – в протилежному напрямку.

9. Момент проходження супутника через точку перигею встановлюють на основі рівняння Кеплера, користуючись формулою (25).

10. На середній момент часу S_0 обчислюють значення середньої аномалії, використовуючи формулу (26).

Розраховані дані параметрів орбіти супутника використовують для побудови просторового і планового зображення орбіти. Щоб показати просторове положення орбіти використовують довготу висхідного вузла орбіти і її кут нахилу, а для побудови орбіти в плані і показу положення супутника на цій орбіті – значення великої півосі a і ексцентриситет орбіти e .

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення поняттю довготи висхідного вузла орбіти.
2. Дайте визначення поняттю кута нахилу орбіти.
3. Довгота висхідного вузла орбіти $\Omega=20^\circ$, а кут нахилу орбіти $i=50^\circ$. Побудуйте за цими даними площину орбіти.
4. Дайте визначення поняттю «аргумент широти» і запишіть формулу для його визначення.
5. В двох точках орбіти істинні аномалії супутника дорівнювали таким значенням: $\nu_1 = 43^\circ$ і $\nu_2 = 286^\circ$. Яка із цих точок знаходиться ближче до точки апогею?
6. Велика піввісь орбіти супутника $a=10000$ км, а ексцентриситет орбіти $e=0.28$. На якій висоті над поверхнею Землі буде супутник, коли буде знаходитись у точці перигею(апогею)?
7. Ексцентриситет орбіти супутника $e=0.5$. У скільки разів ексцентрична аномалія буде більшою (меншою) за істинну аномалію?
8. Супутник спостерігався на орбіті через 20 хвилин після проходження ним точки перигею. Визначіть його середній рух, якщо середня аномалія в точці спостереження складала $M=108^\circ$.

1.4 Лабораторна робота 4. Підготовка даних для спостереження супутника

Мета роботи - засвоїти методику розрахунку даних для побудови траси орбіти супутника і визначення зони видимості супутника в точці спостереження.

Завдання – визначити географічні координати, що відповідають точкам спостереження супутника на орбіті і за цими даними побудувати на карті трасу орбіти; розрахувати зону видимості супутника в точці спостереження і викреслити її на карті.

Тривалість виконання завдання – два заняття.

Основні теоретичні положення

Щоб мати змогу використовувати штучні супутники Землі для розв'язку інженерних задач необхідно проводити їх спостереження. Це означає, що спостерігач повинен бути впевненим в тому, що у наперед відомий момент часу конкретний супутник буде досяжним для спостереження в заданій точці місцевості. Розрахунок необхідних для цього даних починають з побудови траси орбіти супутника на карті. Таким чином ставиться задача за відомими параметрами орбіти супутника і даними про його місцезнаходження на орбіті, розрахувати координати точок земної поверхні, що відповідають відповідним точкам орбіти. Як правило, цими координатами є географічні координати. Нехай відомим є положення супутника у двох точках орбіти, для яких зафіксовано моменти спостереження S_1 і S_2 , а також аргументи широти u_1 і u_2 . Відомими є також параметри, що характеризують орбіту супутника: довгота висхідного вузла орбіти Ω , кут нахилу орбіти i , значення великої півосі орбіти a . Для розв'язку поставленої задачі з визначення географічних координат точок траси розглянемо на рисунку 1.6.

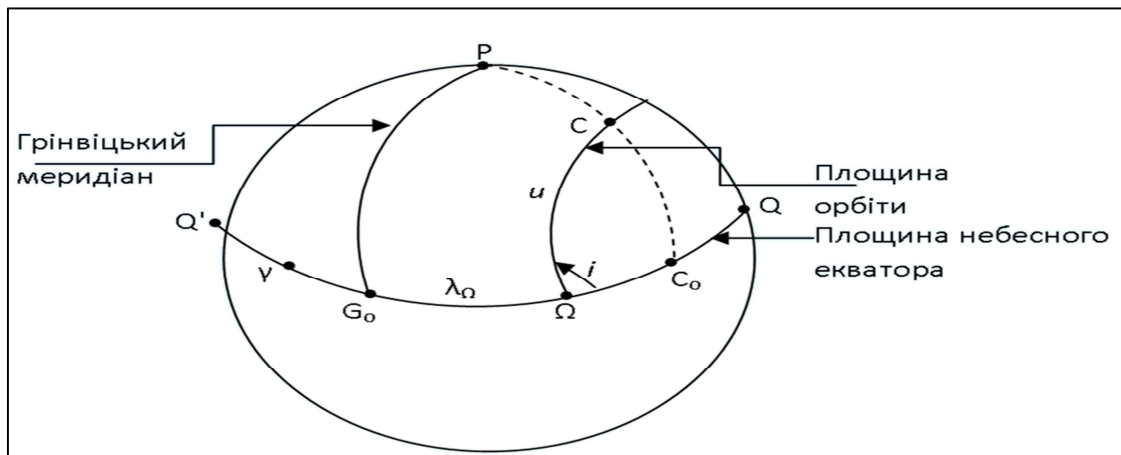


Рисунок 1.6 – До визначення географічних координат точок траси

Нехай QQ' – площина небесного екватора, P – полюс світу, γ – точка весняного рівнодення, Ω – висхідний вузол орбіти, а ΩC – проекція орбіти супутника на геоцентричну небесну сферу.

Тоді положення точки спостереження супутника на орбіті C визначається сферичною відстанню C_0C , яка є мірою географічної широти φ , та сферичною відстанню G_0C_0 , що відповідає географічній довготі λ , оскільки PG_0 є проекцією на небесну сферу меридіана Грінвіча. Зі сферичного трикутника $CC_0\Omega$, що утворився на небесній сфері, знаходимо за правилом Непера

$$\sin \varphi = \sin u \sin i \quad (26)$$

З рисунка 1.6 бачимо, що сторона сферичного трикутника $CC_0\Omega$ - ΩC_0 визначається з рівняння

$$\Omega C_0 = G_0 C_0 - G_0 \Omega,$$

або

$$\Omega C_0 = \lambda - \lambda_{\Omega}.$$

Відомо також, обертання Землі довкруги своєї осі спричиняє зміщення траси по довготі на величину поправки $\delta\lambda$, яку можна обчислити за формулою

$$\delta\lambda = \Delta s \omega, \quad (27)$$

де ω - кутова швидкість обертання Землі, що визначається з виразу

$$\omega = \frac{2\pi}{86164},$$

а Δs - проміжок часу, що пройшов з моменту s проходження супутника через точку висхідного вузла Ω і до того моменту його спостереження s_i , тобто

$$\Delta s = s_i - s.$$

Тоді точне значення сферичної відстані ΩC_0 визначиться з виразу:

$$\Omega C_0 = \lambda + \delta\lambda - \lambda_{\Omega}.$$

З розв'язку сферичного трикутника $SC_0\Omega$ визначаємо географічну довготу точки траси. Маємо:

$$\tan(\lambda + \delta\lambda - \lambda_{\Omega}) = \tan u \cos i \quad (28)$$

Визначивши географічну довготу висхідного вузла орбіти λ_{Ω} і географічні координати точок спостереження супутника φ і λ , отримують необхідні дані для побудови траси орбіти на карті.

Щоб встановити можливість спостереження супутника із заданої точки земної поверхні необхідно встановити, чи проходить супутник через зону видимості цієї точки, а також встановити можливу тривалість його спостереження. Розглянемо можливість розв'язання цього завдання.

Нехай точка C характеризує положення супутника на орбіті, а точка Q – точку спостереження на земній поверхні. Прийнемо за орбіту коло, радіус якого $a = R + H$, де R – радіус Землі 6371 км, а H – висота супутника над земною поверхнею (рис. 1.7). Центральний кут α характеризує ту сферичну відстань QC_0 , яка визначає зону видимості супутника. З трикутника QCO знаходимо, що

$$\alpha = z - \varepsilon$$

$$\varepsilon = \arcsin(R/a \sin z). \quad (29)$$

Тоді лінійне значення радіуса зони видимості на земній поверхні r визначається з виразу

$$r = (\alpha^0 / \rho^0) R. \quad (30)$$

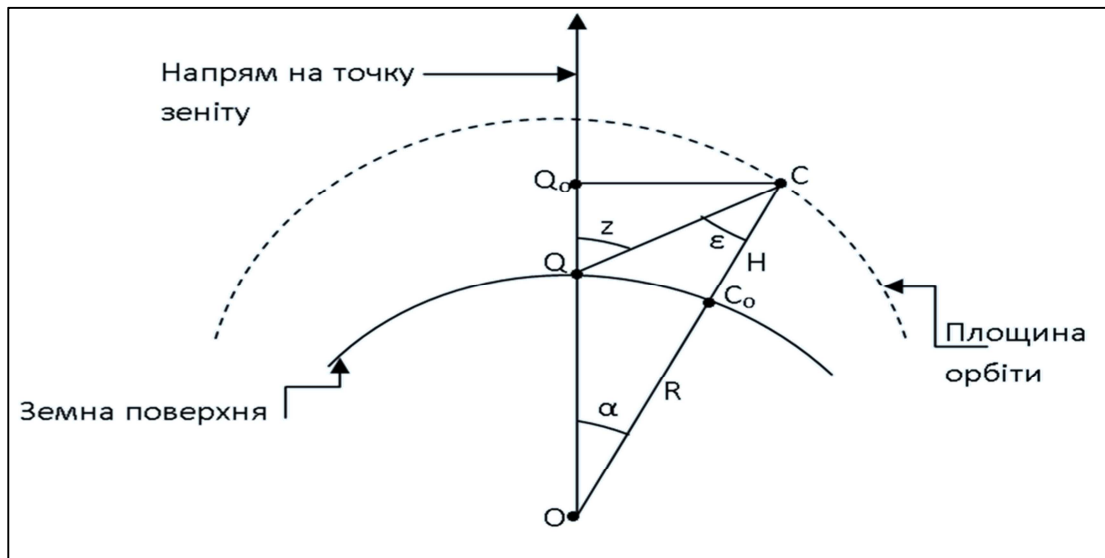


Рисунок 1.7 – До встановлення зони видимості супутника

Період обертання супутника T по орбіті визначають за формулою:

$$T = (2\pi / \nu \mu) a^{3/2}. \quad (31)$$

За періодом обертання супутника T обчислюють час видимості супутника t_0 в границях зони видимості. Маємо:

$$t_0 = (\alpha^0 / 360^0) T. \quad (32)$$

Проміжок часу t_0 характеризує тривалість перебування супутника у зоні видимості, якщо би траєкторія орбіти проходила строго через точку спостереження. Як правило, траєкторія орбіти буде зміщена відносно точки спостереження, і тому реальний час спостереження супутника в зоні видимості t буде меншим від розрахованої тривалості його спостереження t_0 .

Розрахунок реальної тривалості спостереження супутника t обчислюють за формулою:

$$t = (l / l_0) t_0, \quad (33)$$

де l - довжина реальної траєкторії орбіти супутника в межах зони видимості, а l_0 - теоретична довжина траєкторії орбіти супутника при проходженні її строго через точку спостереження.

Виконання роботи

Вихідні дані до першої частини роботи:

1) Моменти спостереження супутника у двох точках орбіти s_1 і s_2 (беруться з лабораторної роботи № 3).

2) Аргументи широти для точок спостереження супутника u_1 і u_2 (беруться з лабораторної роботи № 3).

3) Елементи, що характеризують орбіту супутника:

а) довгота висхідного вузла орбіти Ω ;

б) нахил орбіти i ;

в) велика піввісь орбіти a .

Значення всіх цих величин виписують з лабораторної роботи № 3, у відповідності до індивідуальних даних студента.

Завдання:

За вихідними даними розрахувати географічні координати точок траси орбіти супутника і за цими даними побудувати зображення траси на карті.

Алгоритм розв'язку завдання

1. За формулою

$$n = \mu^{1/2} / a^{3/2}$$

обчислюють середній рух супутника, прийнявши значення гравітаційного параметру $\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

2. Визначають час, коли супутник проходив через точку висхідного вузла за формулою:

$$s = s_i - u_i / n.$$

3. Для кожної точки спостереження розраховують зміщення траси по довготі, використовуючи формулу (27).

4. Визначають географічну довготу висхідного вузла, користуючись формулою

$$\lambda_{\Omega} = \Omega - s.$$

5. Обчислюють географічні координати точок спостереження супутника на орбіті, використовуючи формули (26) і (28). Маємо:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \arcsin(\sin u_i \sin i), \\ \lambda_i &= \arctg(\operatorname{tg} u_i \cos i). \end{aligned} \quad (34)$$

6. На карті, за розрахованими даними λ_{Ω} , φ_i , λ_i , будують зображення траси орбіти супутника.

Вихідні дані до другої частини роботи:

1. Висота спостереження супутника над горизонтом в першій точці спостереження

$$h=20^{\circ}+(0.5n)^{\circ},$$

де n – коефіцієнт, заданий викладачем.

2. Висота супутника в першій точці спостереження над земною поверхнею $H=600 \text{ км}+(10n) \text{ км}$

Алгоритм розв'язку завдання

1 Розраховують зенітну відстань супутника в першій точці спостереження за формулою:

$$Z=90^{\circ}-h.$$

2. Використовуючи формулу (29), обчислюють центральний кут α .

3. Визначають радіус зони видимості в точці спостереження, застосовуючи формулу (30). За точку спостереження на земній поверхні приймають найближчу до траси вузлову точку картографічної сітки. Середній радіус кривини еліпсоїда в точці спостереження R обчислюють за формулою

$$R=(MN)^{1/2}.$$

В цій формулі M і N - радіуси кривини відповідно меридіана і першого вертикала в точці спостереження. Для їх визначення користуються формулами:

$$M = \frac{a_0(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}},$$
$$N = \frac{a_0}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^{1/2}}.$$

Тут a_0 – значення великої півосі земного еліпсоїда ($a_0=6378137 \text{ м}$), - перший ексцентриситет земного еліпсоїда ($e^2=0,0066934$), а φ_0 - географічна широта точки спостереження, яку визначають по карті.

Розрахованим радіусом r окреслюють на карті зону видимості, через яку пролягає траса супутника.

4. Користуючись формулою (31), обчислюють період обертання супутника.

5. Час можливого спостереження супутника в границях зони видимості розраховують на основі формул (32) і (33).

Контрольні запитання

1. Суть географічної системи координат.

2. Якими координатами визначається положення точок на земній поверхні в географічній системі координат? Дайте їх визначення.
3. Велика піввісь орбіти $a=10000$ км. Обчисліть середній рух супутника.
4. За якими формулами обчислюють радіуси кривини меридіана і першого вертикала? Поясніть їх.
5. Яка різниця у поняттях: довгота висхідного вузла і географічна довгота висхідного вузла? Сформулюйте ці визначення.
6. Обчисліть географічну широту точки траси орбіти супутника за такими даними: нахил орбіти 65° ; аргумент широти точки спостереження 100° .
7. Розрахуйте зміщення по довготі точки траси орбіти супутника, якщо супутник спостерігався через 1.5 години після його проходження через висхідний вузол.
8. Встановіть радіус зони видимості для супутника, що рухається по коловій орбіті радіуса 8000 км, якщо супутник спостерігається на висоті в 40° . Прийміть Землю за кулю радіуса R .
9. Обчисліть період обертання супутника по коловій орбіті, якщо його середній рух $n=0.0004$ рад./с.
10. Період обертання супутника по орбіті 2 години. Скільки часу його можна спостерігати, якщо радіус зони видимості в точці спостереження 200 км? При обчисленнях Землю прийняти за кулю радіуса R .

1.5 Лабораторна робота 5. Визначення полярного стиснення Землі методами супутникової геодезії

Мета роботи – засвоїти методику визначення стиснення Землі за результатами обчислень збурень параметрів орбіти штучних супутників Землі (ШСЗ).

Завдання: розрахувати значення полярного стиснення Землі за визначеними величинами збурень довготи висхідного вузла орбіти $\delta\Omega$, висоти перигею δQ і середньої аномалії δM .

Основні теоретичні положення

Гравітаційне поле Землі є одним з факторів, що формує фігуру Землі. Це означає, що існує функціональний зв'язок між параметрами гравітаційного поля і окремими параметрами, що характеризують фігуру Землі. Відомо, що гравітаційний потенціал Землі W , який і характеризує гравітаційне поле Землі, складається з двох складових: нормального потенціалу Землі U , і потенціалу збурення T . Тобто,

$$W=U+T. \quad (42)$$

Потенціал нормального гравітаційного поля визначається формулою:

$$U = \frac{\mu}{r}, \quad (43)$$

де $\mu = fM$ - є добутком постійної гравітаційного поля f на масу Землі M , що, як відомо, називається гравітаційним параметром і дорівнює $398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$, а r - геоцентричний радіус-вектор супутника.

Для визначення потенціалу збурення використовують формулу:

$$T = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \quad (44)$$

В цій формулі: a_e - екваторіальний радіус Землі; φ і λ - геоцентричні значення широти і довготи зовнішньої точки; C_{nk} і S_{nk} - безрозмірні параметри, що характеризують гравітаційне поле Землі; $P_{nk}(\sin \varphi)$ - функції Лежандра, які можуть бути двох видів: $P_{n0}(\sin \varphi)$ - власне поліноми Лежандра, і $P_{nk}(\sin \varphi)$ - приєднані функції Лежандра.

При значенні $k=0$ потенціал збурення (44) показує на скільки потенціал земного еліпсоїда відрізняється від потенціалу, який створювала би однорідна матеріальна сфера. Для цього випадку маємо:

$$T = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_{n0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_{n0}(\sin \varphi), \quad (45)$$

де $J_{n0} = C_{n0}$ - називається зональною гармонікою.

Зональна гармоніка другого порядку $J_{20} = -C_{20}$ характеризує полярне стиснення Землі α . Вона пов'язана зі стисненням формулою:

$$\alpha = \frac{3}{2} J_{20} + \frac{\omega^2}{2\mu} a_e^3 \quad (46)$$

Окрім цього, друга зональна гармоніка впливає на зміну (збурення) елементів орбіти: довготи висхідного вузла орбіти Ω , висоти (аргументу) перигею ω і середньої аномалії M . Ці збурення обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= -\frac{3}{2} J_{20} n \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \Delta T, \\ \Delta \omega &= \frac{3}{4} J_{20} n \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{5(\cos i)^2 - 1}{(1-e^2)^2} \Delta T, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\Delta M = \frac{3}{4} J_{20} n \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{3(\cos i)^2 - 1}{(1-e^2)^{3/2}} \Delta T,$$

де n - середній рух супутника, i - нахил орбіти, e - ексцентриситет орбіти, a - велика піввісь орбіти, а ΔT - проміжок часу між спостереженнями супутника на орбіті.

При $0 < k \leq n$ формула (44) дозволяє отримати характеристику відмінностей потенціалів реальної Землі від потенціалу земного еліпсоїда. Ці складові потенціалу отримали назву секторіальних і тессеріальних гармонік, і вони характеризують вплив довготи на геопотенціал.

Виконання роботи

Вихідні дані

1. Велика піввісь орбіти $a = 10000 \text{ км} + (10n) \text{ км}$.
2. Ексцентриситет орбіти $e = 0,0857 + (0,01n)$.
3. Нахил орбіти $i = 60^\circ + n^\circ$.
4. Моменти спостереження супутника:
 $t_1 = 10^h 12^m 37.^s 28 + n^m$,
 $t_2 = 10^h 28^m 42.^s 55 + n^m$.
5. Екваторіальний радіус Землі $a_e = 6378245$.
6. Коефіцієнт зональної гармоніки $J_{20} = 1082 \cdot 10^{-6}$.

Завдання:

За вихідними даними і розрахованими збуреннями елементів орбіти обчислити стиснення земного еліпсоїда.

Алгоритм розв'язку завдання

- 1 Обчислюють середній рух супутника за формулою

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

2. Визначають збурення окремих параметрів орбіти супутника за заданим коефіцієнтом зональної гармоніки, користуючись формулами (47).

3. Розраховують уточнені значення зональної гармоніки, що відповідають збуренням окремих параметрів орбіти, використовуючи для цього такі формули:

$$J'_{20} = -\frac{2}{3\rho} \frac{\Delta \Omega}{\Delta T} \left(\frac{a}{a_e} \right)^2 \frac{(1-e^2)^2}{n \cos i},$$

$$J''_{20} = \frac{4}{3\rho} \frac{\Delta \omega}{\Delta T} \left(\frac{a}{a_e} \right)^2 \frac{(1-e^2)^2}{n[5(\cos i)^2 - 1]},$$

$$J_{20}''' = \frac{4}{3\rho} \frac{\Delta M}{\Delta T} \left(\frac{a}{a_e} \right)^2 \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n(3(\cos i)^2 - 1)}.$$

Уточнене значення коефіцієнта зональної гармоніки J_{20} визначають як середнє арифметичне із трьох обчислених значень цієї величини.

4. Обчислюють полярне стиснення земного еліпсоїда α за формулою (46), попередньо визначивши кутову швидкість обертання земного еліпсоїда ϵ , використовуючи для цього формулу:

$$\epsilon = \frac{2\pi}{86164}$$

В цій формулі 86164 – число, що характеризує кількість секунд в зоряній добі, тобто одному повному оберту Землі.

Обчислене значення стиснення α необхідно привести до виду

$\alpha = I/N$ і порівняти з відомим значенням полярного стиснення земного еліпсоїда.

Контрольні запитання

1. Яке поле Землі називається гравітаційним?
2. Закони Кеплера незбуреного руху штучних супутників Землі.
3. Диференціальні рівняння збуреного руху.
4. Фактори, що впливають на збурений рух супутників.
5. Вплив гравітаційного поля на збурений рух супутників.
6. Вплив атмосфери землі на збурений рух супутників.
7. Вплив сонячного тиску на збурений рух супутників.
8. На які параметри орбіти впливає друга зональна гармоніка гравітаційного поля Землі?
9. Чи можна за значеннями збурень визначити параметри земного еліпсоїда? Який це буде параметр?

2 ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

2.1 Розрахунково-графічна робота 1. Навігація з використанням супутникових приймачів

Постановка завдання

Якщо Землю і обертається навколо її супутник вважати матеріальними точками, то під дією сил взаємного тяжіння і за відсутності інших сил (від тяжіння небесних тіл, опору атмосфери тощо) супутник буде рухатися по невзбуреній орбіті. Теорія такого руху розглядається в небесній механіці як задача двох тіл. Невзбурений рух супутника відбувається відповідно до законів Кеплера по орбіті, у якій розміри, форма і орієнтування в просторі залишаються постійними.

Реальний рух супутника відбувається під постійним впливом на нього різних сил, з яких найбільший вплив робить стиск Землі. Ці додаткові до сили тяжіння кульової Землі сили називають збурюючими силами, а що відбуваються в орбіті зміни - збуреннями. Застосовуваний при вивченні обуреного руху принцип Лагранжа полягає в тому, що рух розглядають подіями по Кеплерови орбіті з постійно змінюються елементами. У кожен момент часу можна визначити незбурену орбіту, збігається з моментальною обуреною орбітою. Такі орбіти називають оскулюючих в деяку епоху t .

У завданні 1 необхідно за елементами орбіти, даними на початкову епоху t_0 , знайти елементи оскулюючих орбіти на епоху t з урахуванням збурень від стиснення Землі. За ним належить розрахувати прямокутні координати x , y , z в небесній (інерціальної) системі, від яких потім перейти до земної системі координат.

Вихідні дані вибираються з таблиць 2.1 – 2.2 відповідно до номером варіанта.

Таблиця 2.1 – Елементи оскулюючих орбіти

номери вар.	Елементи орбіти на епоху t_0					
	a (км)	e	i	Ω	ω	M_0
1-09	11301.94+N	0.1532172	109°37'32".0	8°17'49".7	213°33'59".0	265°40'38".0
10-19	10706.57+N	0.1619889	77°26'06".1	13°50'00".4	37°07'29".8	92°26'40".4
20-29	11778.50+N	0.0786813	103°46'37".1	21°06'06".1	51°37'14".9	133°10'10".0
30-39	10898.29+N	0.0829255	68°37'53".1	22°34'29".2	92°12'52".5	132°49'57".0
40-49	11133.45+N	0.0974824	67°43'14".1	33°17'50".1	123°55'41".0	216°35'19".0
50-59	11556.68-N	0.1188671	83°30'15".6	37°21'24".1	202°22'34".0	171°01'46".2
60-69	11543.44-N	0.1234717	83°40'17".9	67°08'22".7	37°01'34".4	351°57'14".0
70-79	12503.13-N	0.1539277	107°31'10".0	83°30'15".6	83°30'15".6	83°30'15".6
80-89	13430.93-N	0.1819858	121°21'35".0	104°31'12".4	100°09'35".1	344°55'02".0
90-99	12834.08-N	0.1839034	86°04'17".5	170°11'03".0	160°26'58".8	337°15'43".0

Примітка: Номер варіанта дорівнює двом останнім цифрам номера залікової книжки, N - остання цифра номера. Елементи орбіти: a- велика

піввісь, e - ексцентриситет, i - нахилення, Ω - довгота висхідного вузла, ω - аргумент перигею, M_0 - середня аномалія в епоху t_0 .

Таблиця 2.2 – Додаткова інформація для обчислень

№№ вар.	Начальна епоха t_0		Епоха ефемерид t				
	дата d_1	час S_1	дата d_2	час UTC ₂	час S_0	x_p	y_p
1-10	1	0 ^h 34 ^m 21.031 ^s	2	12 ^h 18 ^m 05.924 ^s +N ^m	0 ^h 10 ^m 57.306 ^s	0.104''	-0.088''
11-20	1	10 ^h 32 ^m 11.666 ^s	3	13 ^h 32 ^m 18.711 ^s +N ^m	0 ^h 14 ^m 53.859 ^s	-0.141''	0.080''
21-30	1	4 ^h 30 ^m 27.234 ^s	2	10 ^h 30 ^m 33.021 ^s +N ^m	0 ^h 18 ^m 50.409 ^s	0.202''	-0.111''
31-40	1	21 ^h 35 ^m 16.422 ^s	3	9 ^h 08 ^m 11.900 ^s +N ^m	0 ^h 22 ^m 46.957 ^s	-0.204''	-0.034''
41-50	1	11 ^h 39 ^m 22.316 ^s	2	14 ^h 37 ^m 35.123 ^s +N ^m	0 ^h 26 ^m 43.504 ^s	0.156''	-0.121''
51-60	1	0 ^h 54 ^m 11.001 ^s	3	11 ^h 22 ^m 14.621 ^s +N ^m	0 ^h 30 ^m 40.051 ^s	-0.133''	-0.088''
61-70	1	4 ^h 27 ^m 20.037 ^s	2	16 ^h 30 ^m 44.720 ^s +N ^m	0 ^h 34 ^m 36.599 ^s	0.104''	-0.088''
71-80	1	13 ^h 04 ^m 44.221 ^s	3	14 ^h 31 ^m 00.824 ^s +N ^m	0 ^h 38 ^m 33.148 ^s	0.104''	-0.088''
81-90	1	10 ^h 31 ^m 01.316 ^s	2	2 ^h 48 ^m 11.021 ^s +N ^m	0 ^h 42 ^m 29.699 ^s	0.104''	-0.088''
91-100	1	7 ^h 33 ^m 08.118 ^s	3	10 ^h 52 ^m 12.903 ^s +N ^m	0 ^h 46 ^m 26.252 ^s	0.104''	-0.088''

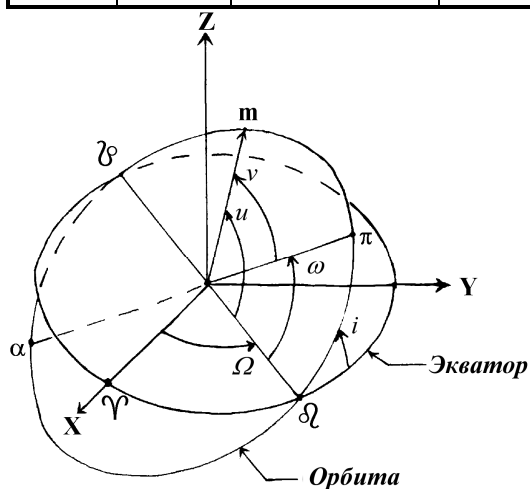


Рисунок 2.1 – Орбіта в просторі

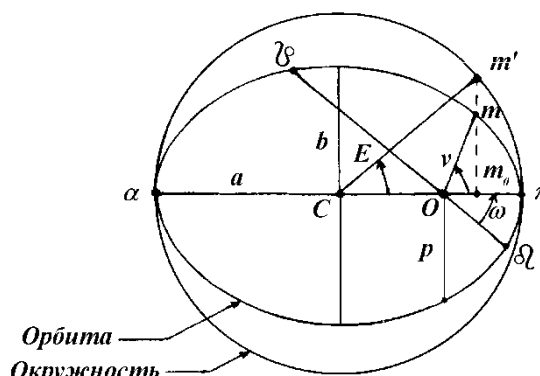


Рисунок 2.2 – Орбіта в площині

Значення будь-якого елементу орбіти супутника на епоху t можна представити у вигляді:

$$\Theta_j = \Theta_{0,j} + \delta \Theta_j, \quad (j=1, 2 \dots 6), \quad (1)$$

де $\Theta_{0,j}$ - незбурений елемент в початкову епоху t_0 , а $\delta \Theta_j$ - залежна від часу сума обурень в елементі від різних факторів. У цьому завданню враховуватимуться тільки вікові гравітаційні збурення, викликані стисненням Землі. Збурення від інших гармонік потенціалу, тяжіння Місяця, Сонця та інших небесних тіл, а також від гальмування в атмосфері, світлового тиску тут розглядатися не будуть.

Стиснення Землі викликає вікові обурення в довготі Ω висхідного вузла орбіти, аргументі перигею ω і початковому значенні середньої аномалії M_0 , а також короткоперіодичні обурення у всіх елементах. Вікові збурення за один оборот супутника можна розрахувати за формулами:

$$\delta \Omega = 540^\circ C_{20} \cos i \left(\frac{a_E}{p} \right)^2, \quad (2)$$

$$\delta \omega = -270^\circ C_{20} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 (1 - 5 \sin^2 i), \quad (3)$$

$$\delta M_0 = -270^\circ C_{20} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

де a_E - велика піввісь земного еліпсоїда, C_{20} - коефіцієнт другий зональної гармоніки розкладання геопотенціала в ряд по сферичним функціям, p, e, i - незбуреною значення відповідно для фокального параметра, ексцентриситету і нахилення орбіти. Фокальний параметр пов'язаний з великою півосі і ексцентриситетом орбіти:

$$p = a (1 - e^2). \quad (5)$$

З урахуванням (1) - (4) можна скласти систему збурених елементів на

$$\begin{aligned} a &= a_0, \\ e &= e_0, \\ i &= i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + d\Omega \cdot N, \\ \omega &= \omega_0 + d\omega \cdot N, \\ M_0 &= M_0^{(0)} + dM^{(0)} \cdot N, \end{aligned} \quad (6)$$

епоху t :

де N - число оборотів, скоєних супутником від епохи t_0 до епохи t .

Числові дані для вирішення:

- велика піввісь загальземного еліпсоїда $a_E = 6378137$ м,
- коефіцієнт другий зональної гармоніки $C_{20} = 1.08263 \cdot 10^{-3}$,
- геоцентрична гравітаційна постійна $GM = 398600.5$ км³с⁻².

Зауважимо, що якщо зі спостережень отримані елементи орбіти на різні епохи, то по змінам в довготі, аргументі перигею і початковому значенні середньої аномалії можна вивести швидкості зміни елементів за один оборот, а за ним відповідно до формулами (2, 3, 4) отримати коефіцієнт C_{20} , який пов'язаний зі стисненням Землі α_E :

$$\alpha_E = -\frac{3}{2} C_{20} + \frac{\omega_E^2 a_E}{2 \gamma_e}, \quad (7)$$

де ω_E - кутова швидкість обертання Землі, а γ_e - нормальна сила тяжіння на екваторі. Ідея отримання параметрів гравітаційного поля Землі по збурень в орбітах супутників лежить в основі динамічного методу космічної геодезії.

Порядок виконання роботи і приклад

Випишемо вихідні дані для свого варіанту. Наведені нижче обчислення виконані для варіанта $N = 0$.

Вихідні дані:

a (км)	e	i	Ω	ω	M_0
11301.94	0.1532172	109°37'32".0	8°17'49".7	213°33'59".0	265°40'38".0
Начальна епоха t_0		Епоха ефемерид t			
дата d_1	час S_1	дата d_2	час UTC_2	час S_0	x_p, y_p
1	0 ^h 34 ^m 21.031 ^s	2	12 ^h 18 ^m 05.924 ^s	0 ^h 10 ^m 57.306 ^s	0.104", 0.088"

1. Вирахуємо момент S_2 , на який необхідно розрахувати Ефемериду супутника, по формулі:

$$S_2 = S_0 + UTC_2(1 + \mu), \quad (8)$$

де всесвітній час UTC_2 і зоряний час по Грінвічу опівночі S_0 вибираються з таблиці 2. Коефіцієнт служить для перетворення одиниць середнього сонячного часу в зоряне: $\mu = 0.0027379035$.

S_0	0 ^h 10 ^m 57.30
	6 ^s
UTC_2	12 ^h 18 ^m 05.9
	24 ^s
$UTC_2 \cdot \mu$	2 ^m 01.508 ^s
S_2	12 ^h 30 ^m 24.7
	38 ^s

2. Розрахуємо період обертання супутника P :

$$P = 2\pi / n, \quad (9)$$

де n - середній рух:

$$n = \sqrt{GM / a^3}, \quad (10)$$

Середній рух отримаємо в розмірностях: радіан / с, °/с, °/ час, а період обертання - в секундах часу, в хвилинах і частках хвилини, а також у годинах і частках години.

$GM = 398600.5$, $n = 5.2546023 \cdot 10^{-2}$ рад./с = $3.0106654 \cdot 10^{-2}$ °/с = 108.38395°/час.

$$P = 11957.489^s = 199.29148^m = 3.3215246^h = 3^h 19^m 17.489^s.$$

3. Знайдемо обурення в довготі висхідного вузла орбіти, аргументі перигею і початковому значенні середньої аномалії за один оборот за формулами (4).

$$p = 11036.621 \text{ км}, C_{20}(a_E / p)^2 = 3.6277488 \cdot 10^{-4}, \quad \delta\Omega = -6.5796757 \cdot 10^{-2} \text{ °/об.},$$

$$\delta\omega = 0.33654868 \text{ }^\circ/\text{об.}, \quad \delta M_0 = 6.5574572^\circ/\text{об.}$$

4. Визначимо число оборотів N , скоєних супутником від епохи $t_0 = (d_1, S_1)$ до епохи $t = (d_2, S_2)$:

$$N = \frac{(t - t_0)^h}{P^h} = \frac{24(d_2 - d_1) + S_2 - S_1}{P} \quad (11)$$

У формулі (11) моменти по Грінвічському зоряному часу S_1, S_2 і період обертання P повинні бути виражені в годинах і частках години. дати d_1 і d_2 , а також момент S_1 вибираються з таблиці 2.2.

$24(d_2 - d_1)$	24^h	$(t - t_0)^h$	35.93436305
$- S_2$	$12^h 30^m 24.738^s$	P^h	3.3215246
$+ S_1$	$0^h 34^m 21.031^s$	N	10.818635
$t - t_0$	$35^h 56^m 03.707^s$		об.

5. Складемо систему обурених елементів за формулою (6): $a = a_0 = 11301.94 \text{ км}$, $e = e_0 = 0.1532172$, $i = i_0 = 109^\circ 37' 32''.0$,

Ω_0	$8^\circ 17' 49''.7$	ω_0	$213^\circ 33' 59''.0$	$M_0^{(0)}$	$265^\circ 40' 38''.0$
$\delta\Omega$	$- 42' 42''.6$	$\delta\omega \cdot N$	$3^\circ 38' 27''.6$	$\delta M \cdot N$	$42' 33''.9$
N		ω	$217^\circ 12' 26''.6$	M_0	$266^\circ 23' 11''.9$
Ω	$7^\circ 35' 07''.1$				

6. Одержимо середню аномалію M на епоху t :

$$M = M_0 + n(t - t_0) \quad (12)$$

Якщо моменти S_1, S_2 виражені в годинах і частках години, то, очевидно, що різниця епох визначається як $t - t_0 = 24(d_2 - d_1) + S_2 - S_1$. Тоді середній рух потрібно використовувати з розмірністю $^\circ/\text{час}$.

Контроль обчислень M зробити по формулі (12'):

$$M = M_0 + 360^\circ \cdot N \quad (12')$$

Значення середньої аномалії привести в інтервал: $0^\circ \leq M < 360^\circ$.

M_0	$266^{\circ}23'11.9''$
$n(t-t_0)$	$3894^{\circ}42'29.6''$
M	$201^{\circ}05'41.5''$

M_0	$266^{\circ}23'11.9''$
$360 \cdot N$	$3894^{\circ}42'31.0''$
M	$201^{\circ}05'42.9''$

Для подальших обчислень взято середнє значення: $M = 201^{\circ}05'42.2''$.

7. Обчислимо ексцентричну аномалію, вирішивши рівняння Кеплера методом наближень:

$$E = M + e \sin E. \quad (13)$$

Передбачається, що в цьому рівнянні E , M , e дано у радіанній мірою. Якщо рішення виробляється в градусній мірі, то використовується формула:

$$E = M + e \rho^{\circ} \sin E, \quad (13')$$

де $\rho^{\circ} = 180/\pi$ - число градусів в радіані.

В початковому наближенні приймаємо:

$$E^{(0)} = M, \quad (14)$$

в наближенні з номером i :

$$E^{(i)} = M + e \rho^{\circ} \sin E^{(i-1)}. \quad (14')$$

Процес продовжується до тих пір, поки розбіжність між значеннями ексцентричної аномалії $E^{(i)}$ та $E^{(i-1)}$ чи не стане менше точності обчислень $\varepsilon = 0.1''$.

Підготуємо: $e \rho^{\circ} = 8.7786989^{\circ}$.

M	201.0950	201.0950	201.0950	201.0950	201.0950	201.0950
	6°	6°	6°	6°	6°	6°
$e \rho^{\circ} \sin E^{(i-1)}$	-	-	-	-	-	-
	3.15960	2.84871	2.74864	2.76320	2.76107	2.76139
$E^{(i)}$	198.9354	198.2463	198.3464	198.3318	198.3339	198.3336
	6	5	2	6	9	7

M	201.0950	201.0950
	6°	6°
$e \rho^{\circ} \sin E^{(i-1)}$	-	-
	2.761340	2.76135
$E^{(i)}$	198.3337	198.3337
	2	1

8. Перейдемо від ексцентричної аномалії E до істинної v :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (15)$$

Четверть для $v/2$ вибирається з урахуванням того, що $v/2 \leq 180^\circ$.

$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$	1.1669964	$\tan v/2$	-7.2317582
$E/2$	99.166805	$v/2$	97.87287
$\tan E/2$	-6.1968985	v	195.74574

9. Обчислимо значення обуреного радіус-вектора r супутника:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (16)$$

з контролем (в межах не більше 10 м):

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (16)$$

Отримано по формулі (16) $r = 12945.694$ км, по формулі (16') $r = 12945.694$ км.

10. Знайдемо обурений аргумент широти супутника:

$$u = \omega + v. \quad (17)$$

ω	217°12'26".6
v	195°44'44".7
u	52°57'11".3

11. Обчислимо координати супутника в небесній системі (НСК):

$$\mathbf{r}_{НСК} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-i) \begin{bmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

або

$$\mathbf{r}_{НСК} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{bmatrix}. \quad (19)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0.63258240 \\ -0.18620086 \\ 0.75177712 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8189.218 \\ -2410.499 \\ 9732.276 \end{bmatrix},$$

контроль: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 12945.693$.

12. Перетворимо координати супутника з небесної системи НСК в загальноземного ОЗСК, не враховуючи при цьому вплив прецесії і нутації:

$$\mathbf{r}_{ОЗСК} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{Pol}(t) \mathbf{S}(S_2) \mathbf{r}_{НСК}. \quad (20)$$

Матриця $\mathbf{S}(S_2)$, в якій S_2 - визначений раніше і виражений в градусах момент по зоряному Гринвіцьким часом, потрібна для обліку добового обертання Землі. Вона представляється виразом:

$$\mathbf{S}(S_2) = \begin{bmatrix} \cos S_2 & -\sin S_2 & 0 \\ \sin S_2 & \cos S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

Матриця для обліку руху полюса $\mathbf{Pol}(t_2)$ в епоху t_2 має вид:

$$\mathbf{Pol}(t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

з координатами полюсу x_p, y_p в радіанній мірі.

Спочатку висловимо момент S_2 в градусній мірі і координати полюса в радіанах: $S_2 = 12^h 30^m 24.738^s = 187.60308^\circ$, $x_p = 0.104''/\rho = 5.04 \cdot 10^{-7}$, $y_p = -0.088''/\rho = -4.27 \cdot 10^{-7}$. Тут $\rho = 206265''$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ОЗСК} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5.04 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 1 & -4.27 \cdot 10^{-7} \\ 5.04 \cdot 10^{-7} & 4.27 \cdot 10^{-7} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.99120844 & 0.13230966 & 0 \\ -0.13230966 & -0.99120844 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 8189.218 \\ -2410.499 \\ 9732.276 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8436.154 \\ 1305.795 \\ 9732.276 \end{bmatrix}, \quad \text{контроль: } r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 12945.693. \end{aligned}$$

13. Зробіть самостійно плоский і просторовий креслення орбіти супутника (за аналогією з рис. 2.1 і 2.2) із зразковим (з точністю до чверті) відображенням елементів орбіти, отриманих в своєму варіанті контрольної роботи. На кресленнях відобразити координатні осі, точки і лінії орбіти, елементи орбіти і положення Землі.

2.2 Розрахунково-графічна робота 2. Геодезичні знімання за допомогою супутникових приймачів

Визначення координат диференціальним методом GPS

Застосування супутникових навігаційних систем в геодезії

Супутникові навігаційні системи (СНС) в останні роки знайшли в геодезії найширше застосування. Американська СНС має два рівноцінних назви: Navigation Satellite Providing Time and Range, скорочено NAVSTAR (навігаційне супутникове забезпечення часу і дальності), і Global Positioning System, скорочено GPS (Глобальна система позиціонування). Російська СНС називається ГЛОНАСС (Глобальна навігаційна супутникова система).

СНС призначені для надійного, високоточного, незалежного від часу доби, радіоперешкод, погоди і розташування на земній кулі визначення координат і часу. Принцип роботи СНС полягає в тому, що кожен супутник безперервно передає сигнали строго певного виду, що несуть інформацію про час і положенні супутника в просторі. Спеціальний приймач цих сигналів декодує прийняту інформацію і визначає з її обробки своє становище і точний час.

Кожна з СНС складається з трьох підсистем:

- Підсистеми космічних апаратів (ПКА),
- Підсистеми контролю і управління (ПКУ),
- Підсистеми апаратури споживачів (користувачів) системи (ПАП).

Підсистема космічних апаратів складається з сузір'я супутників і космодрому, з якого вони запускаються. Сузір'я супутників при повному розгортанні системи складається з 24 супутників. Це забезпечує безперервне присутність від 4 до 8 супутників вище 15° над горизонтом в будь-якій точці земної кулі. супутники NAVSTAR розташовуються в 6 орбітальних площинах з нахилом 55° . Висота польоту супутників 20000 км, період обертання близько 12 годин. Велика висота польоту забезпечує можливість спостереження супутників з великої території і виключає важко прогнозований вплив атмосфери. На супутнику розташовуються приймально-передавачі, рубідієві або цезієві атомний годинник, керуючий процесор і різноманітне допоміжне обладнання. Ці супутники остаточно сформували систему в сучасному вигляді: 21 основний супутник + 3 допоміжних + 4 резервних. На супутниках реалізовані режими SA - Selective Availability і AS - Anti-Spoofing для несанкціонованих користувачів.

В ПКА ГЛОНАСС також входить сузір'я з 24 супутників, розташованих в трьох площинах, рознесених по довготі на 120° . У кожній площині знаходиться по 8 супутників. Нахил орбіти до екватора дорівнює 64.8° , період обігу $P = 11^h 15^m 44^s$.

Підсистеми контролю і управління СНС призначені для контролю роботи космічних апаратів, збору даних для визначення орбіт, закладки даних в процесори супутників, а також формування системного часу. ПКУ NAVSTAR складається з Головної станції управління (ГСУ), 5 контрольних станцій (КС), і трьох станцій засилання даних (СЗ).

Підсистема апаратури споживачів включає в себе наступні види приймачів:

- Навігаційні приймачі,
- Навігаційно-топографічні приймачі,
- Геодезичні приймачі,
- Приймачі для визначення і зберігання часу.

Навігаційні приймачі найбільш прості і дешеві. Вони забезпечують визначення координат в абсолютному режимі, в реальному часі. Вони можуть бути одно- і багатоканальними, одно- і двочастотних, працюючими по NAVSTAR, або ГЛОНАСС'у, або за обома системами. Вони забезпечують даними невисокою точності, порядку 10-15 м в кращому випадку, а зазвичай 50-100 м і грубіше. При використанні диференціального методу можлива більш точна навігація, забезпечує, наприклад, такий відповідальний процес як посадка літака.

Навігаційно-топографічні приймачі зазвичай мають точність на рівні від 10 м до 1 дм при відстанях до 50 - 500 км, що досягається диференціальним режимом роботи. Вони можуть бути кодовими і кодо-фазовими. Останні мають більш високу точність, але обмежені за дальності. Постійно підвищується точність апаратури стирає грань між навігаційно-топографічної апаратурою і чисто геодезичної. Остання може бути фазової кодо-корелятивною (зазвичай називається просто "фазової" апаратурою) і фазової безкодової, що працює за принципом радіоінтерферометра (типу "Макрометрів"). Фазові приймачі відрізняються по числу каналів, вони можуть бути одно- і двочастотних, а також працюючими по одній або двох СНС. Двочастотні фазові приймачі найбільш повно забезпечують все розмаїття можливостей супутникової апаратури і дають найбільш точні результати на відстанях до декількох тисяч кілометрів. Наявність двох частот забезпечує точний облік впливу іоносфери. Одночастотні фазові приймачі простіші, дешеві і дають досить високу точність на відстанях до 10-15 км.

Приймачі для визначення і зберігання часу дозволяють визначати час з точністю до декількох наносекунд за рахунок порівняння власної шкали часу, заснованої на роботі порівняно дешевих кварцових або рубідієвих генераторів, зі шкалою часу супутників, визначаючи тимчасову затримку по точному позиціонуванню та орбіті супутника.

Кодовий приймач вимірює тимчасову затримку τ_i^k між сигналом, прийнятим від супутника k , і таким же сигналом, створеним в приймачі i . В цьому випадку відстань від приймача до супутника можна було б отримати за формулою:

$$\rho_i^k = c \cdot \tau_i^k, \quad (23)$$

де c - швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі. Тоді положення спостерігача в загальній системі координат визначалося б у вигляді вектора $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$ з рішення лінійної засічки по дальностям, виміряним до трьох супутників з відомими координатами $\mathbf{r}^k = (X^k, Y^k, Z^k)^T$. Через те, що годинник супутника і приймача синхронізовані зі шкалою системного часу відповідно з помилками dt^k і dt_i , в дальностях виникають систематичні помилки

$$b^k = c \, dt^k, \quad b_i = c \, dt_i. \quad (24)$$

Крім того, на результат вимірювань впливають додаткові фактори: іоносферних і тропосферних рефракція, багатокопійний, шуми в електронних ланцюгах приймача та ін. В результаті отримують псевдодальностей ρ_i^k , пов'язану з геометричною дальністю ρ_i^k рівнянням:

$$\rho_i^k = \rho_i^k + b^k - b_i + \Delta_{trop.} + \Delta_{iono.} + \Delta_{noise}. \quad (25)$$

Джерела спотворень псевдодальності можна розділити на дві категорії, а саме: що моделюються і немоделіруемые. Вплив іоносфери, тропосфери і зрушення годин супутника враховується шляхом введення поправок. Зрушення шкали годин приймача dt_i розглядається як систематична помилка і вводиться в якості додаткового що визначається параметра. решта впливу Δ_{noise} представляють випадкові помилки вимірів (шуми).

Висловимо геометричну дальність через координати супутника і пункту:

$$\rho_i^k = \sqrt{(X^k - X_i)^2 + (Y^k - Y_i)^2 + (Z^k - Z_i)^2}. \quad (26)$$

Попередні координати пункту спостережень відомі у вигляді радіуса-вектора $\mathbf{R}_i^0 = (X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)^T$. Тоді, представивши шукані координати пункту як

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^0 + d\mathbf{R}_i, \quad (27)$$

де $d\mathbf{R}_i = (dX_i, dY_i, dZ_i)^T$ - вектор поправок в координати пункту, можна рівняння (26) привести до лінійного виду:

$$\rho_i^k = -e_{X,i}^k dX_i - e_{Y,i}^k dY_i - e_{Z,i}^k dZ_i + (\rho_i^k)^0. \quad (28)$$

коефіцієнти при dX_i , dY_i , dZ_i в рівнянні (28) є напрямними косинусами топоцентричних напрямків на супутник (із зворотним знаком):

$$e_{X,i}^k = \frac{X^k - X_i^0}{(\rho_i^k)^0}, \quad e_{Y,i}^k = \frac{Y^k - Y_i^0}{(\rho_i^k)^0}, \quad e_{Z,i}^k = \frac{Z^k - Z_i^0}{(\rho_i^k)^0}, \quad (29)$$

а величина $(\rho_i^k)^0$ обчислюється через координати супутника і попередні координати пункту спостережень:

$$(\rho_i^k)^0 = \sqrt{(X^k - X_i^0)^2 + (Y^k - Y_i^0)^2 + (Z^k - Z_i^0)^2}. \quad (30)$$

Рівняння поправок для псевдодальності отримаємо після підстановки формули (28) в рівняння (25) :

$$-e_{X,i}^k dX_i - e_{Y,i}^k dY_i - e_{Z,i}^k dZ_i + b_i + l_\rho = v_\rho, \quad i = 1, \quad k \geq 4, \quad (31)$$

де вільний член рівняння представляє різницю виміряної і виправленої поправками псевдодальності і дальності $(\rho_i^k)^0$:

$$l_\rho = \rho_i^k - (\rho_i^k)^0. \quad (32)$$

Таким чином, одночасні спостереження не менш, ніж чотирьох супутників GPS (рис. 2.3), дозволяють визначити і координати пункту і час. Описаний метод визначень координат називається абсолютним методом. Точність цього методу зазвичай невисока і складає в середньому 50 -100 м.

У диференціальному методі один і той же сузір'я супутників спостерігають не менше двох приймачів (рис. 2.4). Один з них, базовий, знаходиться в точці з відомими істинними координатами \mathbf{R}_i і безперервно визначає свої координати \mathbf{R}_i по псевдо. Різниця істинних і виміряних координат базового приймача дає значення диференціальної поправки:

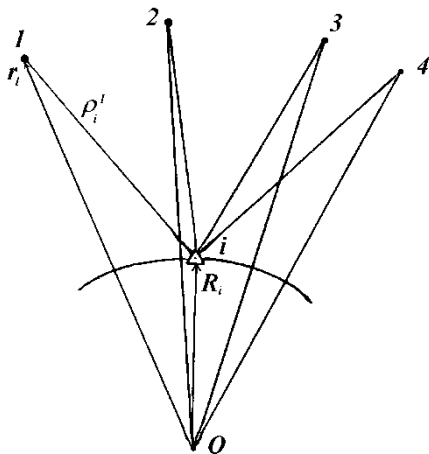


Рисунок 2.3 – Абсолютний метод

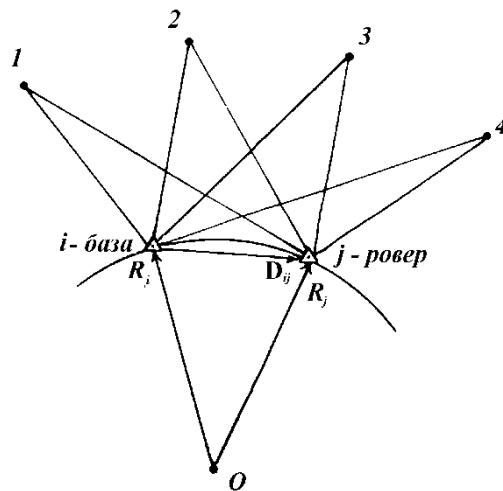


Рисунок 2.4 – Диференціальний метод

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j . \quad (33)$$

Польовий приймач (ровер) знаходить свої координати \mathbf{R}_j по тим же супутникам і, використовуючи диференціальну поправку, виправляє їх:

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j + \Delta \mathbf{R} . \quad (34)$$

Точність вимірювань буде тим вище, чим сильніше будуть корельовані помилки вимірювань.

В фазових геодезичних приймачах вимірюється не тільки псевдодальностей, але і різниця фаз Φ_i^k на частоті несучої між прийнятим сигналом і сигналом, створеним в приймачі. Точність фазових вимірювань значно вище, ніж кодових, відносна помилка сторони зазвичай виходить на рівні 10^{-6} і менше.

Постановка завдання

Проведено сеанс синхронних спостережень із застосуванням GPS-апаратури, яка працює за стандартним C / A-коду. Базовий приймач і був встановлений на точці з відомими в загальземного системі WGS-84 геодезичними координатами $B_{i,84}$, $L_{i,84}$, $H_{i,84}$. Спостереження базового приймача були оброблені, і отримані його координати $X_{i,84}$, $Y_{i,84}$, $Z_{i,84}$ абсолютним методом (табл. 2.5). Польовий приймач j знаходився в точці, для якої необхідно визначити координати $X_{j,84}$, $Y_{j,84}$, $Z_{j,84}$ и $B_{j,84}$, $L_{j,84}$, $H_{j,84}$ в системі WGS-84 и $B_{j,42}$, $L_{j,42}$, $H_{j,42}$ в системі СК-42, а також його нормальну висоту H_j^γ . Для польового приймача відомі лише його наближені координати $X_{j,84}^0$, $Y_{j,84}^0$, $Z_{j,84}^0$. Базовий і польовий приймачі виміряли псевдодальності до 5 одних і тих же навігаційних супутників ($k = 1, 2, \dots, 5$). Координати супутників X_{84}^k , Y_{84}^k , Z_{84}^k в системі WGS-84 розраховані з навігаційного повідомленням

(табл. 2.3). Тут же дано псевдодальності p_j^k , виміряні польовим GPS-приймачем і виправлені за вплив тропосфери та іоносфери (j- номер пункту, k - номер супутника). В таблиці 2.4 дано попередні координати польового приймача і висота квазігеоїда. Необхідні в роботі параметри еліпсоїдів WGS-84 і СК-42 наводяться в таблиці 2.6, а параметри зв'язку між ними – в таблиці 2.7.

Використовуючи представлену інформацію необхідно за технологією диференціального методу визначити прямокутні і геодезичні координати польового приймача в системі WGS-84 $X_{j,84}$, $Y_{j,84}$, $Z_{j,84}$ и $B_{j,84}$, $L_{j,84}$, $H_{j,84}$ а також в системі СК-42 $B_{j,42}$, $L_{j,42}$, $H_{j,42}$. Крім того необхідно знайти нормальну висоту H_j^y . Для координат польового приймача, отриманих в системі WGS-84 абсолютним методом, зробити оцінку точності.

Таблиця 2.3 – Координати навігаційних штучних супутників Землі і псевдодальності, виправлені за атмосферну рефракцію

№ ар.	Координати НІСЗ в системі WGS-84			Псевдодальності		
	X	Y	Z	Rove r-1	Rove r-2	Rove r-3
	-17 263.7861	4 742.0874	19 923.0056	23 062.109	22 976.667	23 176.247
	-7 344.1997	-14 080.3301	21 464.2656	25 283.726	25 233.857	25 278.560
	-16 648.8510	20 584.4062	- 351.8370	24 708.534	24 652.178	24 867.551
	15 194.5652	- 4 638.1696	21 005.4515	23 143.146	23 188.680	23 001.387
	16 336.3721	15 997.3468	14 235.5931	22 060.307	22 130.006	21 965.332
	-18 822.6372	- 6 009.0440	17 438.0388	24 787.036	24 697.667	24 880.599
	- 7 909.6972	24 918.7556	-701.1697	23 614.729	23 594.297	23 731.639
	-17 167.5814	4 491.3668	20 062.0540	23 066.947	22 981.699	23 179.605
	- 7 058.7658	-14 132.0215	21 529.3063	25 275.500	25 226.653	25 268.300
	-16 625.5573	20 606.8285	8.0668	24 629.413	24 573.347	24 788.495
	15 373.4199	- 4 404.9867	20 921.6182	23 118.432	23 164.947	22 975.021
	16 290.0587	15 791.8357	14 491.6847	22 019.156	22 087.883	21 923.527
	-18 943.2553	- 6 221.3049	17 232.6038	24 863.971	24 774.432	24 957.736
	- 7 921.4261	24 923.5009	- 324.4689	23 531.685	23 511.057	23 648.901
	-17 072.2548	4 238.3295	20 196.2472	23 073.198	22 988.149	23 184.375

Продовження таблиці 2.3

- 6 772.8755	-14 185.6384	21 589.0895	25 268.592	25 220.770	25 258.750
-16 599.4561	20 625.7564	335.0547	24 557.490	24 500.561	24 715.996
15 552.9723	- 4 173.7785	20 832.4588	23 095.255	23 142.754	22 951.396
16 243.8233	15 602.8117	14 744.3224	21 990.453	22 058.779	21 893.668
-19 063.5566	- 6 430.4743	17 022.7920	24 941.179	24 851.479	25 034.551
- 7 931.6224	24 923.1425	52.3160	23 449.557	23 428.385	23 566.701
-16 977.8589	3 983.0353	20 325.5520	23 080.862	22 996.013	23 190.558
- 6 486.6118	-14 241.1788	21 643.6023	25 263.001	25 216.211	25 251.715
-16 570.4979	20 641.2313	679.3936	24 482.169	24 424.964	24 641.278
15 733.1550	- 3 944.5995	20 737.9938	23 073.624	23 122.111	22 929.619
16 197.7287	15 410.3095	14 993.4453	21 963.012	22 030.933	21 865.671
-19 183.4694	- 6 636.5178	16 808.6566	25 018.641	24 928.785	25 112.226
- 7 940.2039	24 917.7056	429.0875	23 367.843	23 346.303	23 484.465
-16 884.4452	3 725.5448	20 449.9363	23 089.934	23 005.291	23 197.549
- 6 200.0575	-14 298.6387	21 692.8328	25 258.729	25 212.976	25 244.797
-16 538.6343	20 653.2958	1 022.9116	24 406.657	24 349.787	24 566.339
15 913.8996	- 3 717.5030	20 638.2458	23 053.547	23 103.030	22 908.805
16 151.8369	15 214.3653	15 238.9937	21 936.845	22 004.358	21 839.544
-19 302.9214	- 6 839.4026	16 590.2523	25 096.336	25 006.331	25 190.742
- 7 947.0894	24 907.2182	805.7475	23 286.737	23 264.832	23 404.009
-16 792.0639	3 465.9204	20 569.3693	23 100.413	23 015.978	23 207.149
- 5 913.2955	-14 358.0126	21 736.7707	25 255.781	25 211.072	25 240.402
-16 503.8181	20 661.9942	1 366.1734	24 332.641	24 274.915	24 491.665
16 095.1367	- 3 492.5408	20 533.2385	23 035.040	23 085.516	22 889.512
16 106.2096	15 015.0170	15 480.9087	21 911.963	21 979.066	21 814.099
-19 421.8402	- 7 039.0977	16 367.6351	25 174.245	25 084.102	25 268.877
- 7 952.1985	24 891.7103	1 182.1981	23 206.263	23 183.996	23 323.558
-17 360.8153	4 990.4330	19 779.1363	23 058.685	22 973.050	23 174.304
- 7 629.0945	-14 030.5649	21 393.9818	25 293.248	25 242.376	25 290.122
-16 669.3879	20 558.4496	- 695.5191	24 784.488	24 728.429	24 943.418

Продовження таблиці 2.3

0	15 016.4745	- 4 873.2712	21 083.9388	23 169.383	23 213.942	23 028.378
	16 382.6999	16 159.3121	13 976.1087	22 080.297	22 149.812	21 985.771
	-18 701.7736	- 5 793.7280	17 639.0443	24 710.395	24 621.204	24 803.765
	- 7 896.5183	24 908.8834	- 1 077.6882	23 697.539	23 678.076	23 814.896
	-17 458.6142	5 236.3465	19 630.4816	23 056.675	22 970.854	23 173.7768
1	- 7 913.3673	-13 982.7246	21 318.4703	25 304.077	25 252.203	25 302.379
	-16 687.2200	20 528.9203	- 1 039.0270	24 860.668	24 804.904	25 018.871
	14 839.2133	- 5 110.2340	21 157.0622	23 197.133	23 240.722	23 056.285
	16 428.9784	16 337.6999	13 713.2936	22 112.708	22 182.611	23 018.130
	-18 580.7353	- 5 575.3946	17 835.5689	24 634.068	24 545.062	24 726.652
2	- 7 881.9727	24 893.8637	1 453.9265	23 137.330	23 115.108	23 253.608
	-17 557.1270	5 479.7721	19 477.0779	23 056.080	22 970.076	23 174.054
	- 8 196.9354	-13 936.8066	21 237.7481	25 316.202	25 263.336	25 316.527
	-16 702.4003	20 495.7814	1 382.2745	24 353.581	24 295.015	24 512.788
	14 662.8459	- 5 348.9994	21 224.8050	23 226.383	23 269.004	23 086.293
3	16 475.1430	16 512.4805	13 447.2108	22 146.328	22 216.601	22 052.296
	-18 459.5925	- 5 354.0836	18 027.5627	24 558.077	24 469.263	24 650.483
	- 7 866.1447	24 873.6782	1 829.7868	23 055.127	23 032.622	23 171.275
	-17 656.2968	5 720.6554	19 318.9630	23 056.897	22 970.717	23 176.331
	8 479.7162	-13 892.8063	21 151.8332	25 024.326	25 035.726	24 915.081
4	-16 714.9828	20 458.9978	1 725.1757	24 285.558	24 226.535	24 444.877
	14 487.4354	- 5 589.5074	21 287.1517	23 257.117	23 298.784	23 117.787
	16 521.1288	16 683.6256	13 177.9238	22 181.143	22 251.803	22 087.656
	-18 338.4149	- 5 129.8363	18 214.9766	24 482.442	24 393.828	24 574.681
	- 7 849.1185	24 848.3111	2 205.1715	22 973.649	22 950.865	23 089.642

Закінчення таблиці 2.3

5	-17 756.0659	5 958.9435	19 156.1756	23 059.126	22 972.771	23 180.623
	- 8 761.6272	13 850.7176	21 060.7451	20 993.894	20 944.018	21 077.016
	-16 725.0226	20 418.5354	- 2 067.6445	25 089.836	25 035.645	25 248.753
	14 313.0438	- 5 831.6968	21 344.0886	23 289.323	23 330.040	23 151.353
	16 566.8705	16 851.1085	12 905.4970	22 217.134	22 288.165	22 124.791
6	-18 217.2714	-4 902.6956	18 397.7630	24 407.185	24 318.775	24 499.864
	- 7 830.9792	24 817.7491	2 579.9828	22 892.935	22 869.874	23 009.348
	-16 610.5939	2 940.5235	20 793.2636	23 125.574	23 041.561	23 229.360
	-5 339.4785	-14 482.4722	21 808.7329	25 253.861	25 211.252	25 234.388
	16 458.8066	-3 049.2186	20 307.5475	23 002.751	23 055.222	22 855.820
7	-16 425.1462	20 669.4761	2 051.5846	24 183.742	24 126.133	24 342.561
	16 015.9911	14 606.2667	15 953.6063	21 865.497	21 932.370	21 766.498
	19 657.7861	-7 428.8039	15 909.9901	24 616.547	24 679.404	24 451.546
	-7 956.7700	24 845.7658	1 934.0802	23 046.69	23 024.314	23 163.950
	-16 521.5997	2 674.8809	20 897.6689	23 139.641	23 056.449	23 241.962
8	-5 052.5885	-14 547.5386	21 836.7427	25 254.292	25 213.343	25 233.374
	16 381.2027	20 668.3548	2 393.5624	23 486.172	23 562.278	23 420.838
	16 641.0964	-2 830.9547	20 186.9183	22 988.384	23 042.456	22 841.338
	15 971.5194	14 396.9479	16 184.2751	21 844.532	21 910.987	21 745.561
	-7 956.0761	24 815.4009	2 309.3164	22 968.243	22 945.513	23 0086.033
9	-17 263.7861	4 742.0874	19 923.0056	23 062.108	22 976.666	23 176.247
	-7 344.1997	-14 080.3301	21 464.2656	25 283.720	25 233.857	25 278.560
	15 373.4199	- 4 404.9867	20 921.6182	23 118.432	23 164.947	22 975.921
	16 290.0587	15 791.8357	14 491.6847	22 019.156	22 087.883	21 923.527
	-16 725.0226	20 418.5354	- 2 067.6445	25 090.436	25 035.644	25 248.753
0	-17 167.5814	4 491.3668	20 062.0540	23 066.947	22 981.699	23 179.604
	- 7 058.7658	-14 132.0215	21 529.3063	25 275.500	25 226.653	25 268.300
	16 336.3721	15 997.3468	14 235.5931	22 060.307	22 129.406	21 965.332
	- 7 866.1447	24 873.6782	1 829.7868	23 055.127	23 032.623	23 171.875
	8 479.7162	-13 892.8063	21 151.8332	25 024.326	25 035.727	24 915.681

Примітка: Номер варіанта N відповідає двом останнім цифрам номера залікової книжки. Координати супутників вибираються за номером N', рівному залишку від ділення N на 20, при цьому варіанти 1-20 і 61-80 використовують ровер-1, варіанти 21-40 і 81-100 використовують ровер-2, і варіанти 41-60 - ровер-3.

Таблиця 2.4 - Попередні координати польового приймача і висота квазігеоїда над еліпсоїдом

№ приймачів (роверів)	Попередні координати польового приймача (км)			Висота квазігеоїда (м) ζ_j
	X_j^0	Y_j^0	Z_j^0	
1	453.0	3638.0	5201.0	-31.25
2	356.0	3626.0	5217.0	-30.27
3	617.0	3579.0	5224.0	-35.44

Таблиця 2.5 – Координати базової СТАНЦІЇ в системі WGS-84, отримані зі спостережень абсолютним методом

№	Координати базової станції		
ва р.	X_i	Y_i	Z_i
1	459531.28	3644015.64	5197087.25
2	459526.44	3644005.66	5197037.28
3	459581.23	3643955.34	5197127.12
4	459564.77	3643994.58	5197104.45
5	459582.19	3644077.24	5197133.20
6	459532.28	3644025.67	5197180.29
7	459611.24	3644119.32	5197137.14
8	459572.35	3644025.36	5197099.40
9	459581.02	3644034.14	5197188.15
10	459577.98	3644125.69	5197181.25
11	459433.55	3644106.47	5197082.11
12	459591.20	3643925.77	5197152.11
13	459605.99	3643966.08	5197006.01
14	459539.21	3643885.94	5197191.36
15	459539.20	3644211.11	5197182.88
16	459577.12	3644044.44	5197011.10
17	459542.20	3644015.60	5197087.25
18	459553.31	3644015.46	5197087.25
19	459564.45	3644015.33	5197087.25
20	459573.67	3644015.22	5197087.25

Істинні координати базової станції:

$$B_{i,84} = 54^{\circ}55'53.888'', \quad L_{i,84} = 82^{\circ}48'45.406'', \quad H_{i,84} = 98.794 \text{ м.}$$

Таблиця 2.6 – Параметри референц-еліпсоїдів

№ п.п.	Назви параметрів	Розмірність	Загальземний еліпсоїд WGS-84	Еліпсоїд Красовського
	Большая полуось, a_E	м	6378137	6378245
	Знаменатель сжатия, $1/\alpha$	б/р.	298.257223563	298.3
	Квадрат эксцентриситета e^2	б/р.	$6.694379990 \cdot 10^{-3}$	$6.6934215 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 2.7 – Параметри для переходу від системи WGS-84 до СК-42

Параметри переносу (м)			Ма сштаб	Кути обертання		
T_X	T_Y	T_Z	m	ω_X	ω_Y	ω_Z
-	12	78.	0.8	0.1	0.0	0.6
22.52	6.59	84	$9 \cdot 10^{-6}$	65"	89"	27"

Порядок виконання роботи і приклад

Визначення координат польового приймача в системі WGS-84 вирішенням засічки по псевдо (абсолютний метод)

Випишемо вихідні дані для свого варіанту: координати супутників і псевдодальності з табл. 3 і попередні координати приймача-ровера з таблиці 4. Приклад в таблиці 8 дається для деякого абстрактного варіанту, без номеру.

Таблиця 2.8 – Координати супутників і пункту і виміряні псевдодальності

	X	Y	Z	ρ
1	-17 263.7861	4 742.0874	19 923.0056	23 062.1089
2	-18 822.6372	- 6 009.0440	17 438.0388	24 787.0364
3	15 373.4199	- 4 404.9867	20 921.6182	23 118.4326
4	16 243.8233	15 602.8117	14 744.3224	21 990.4531
5	- 8 761.6272	13 850.7176	21 060.7451	20 993.8943
ровер	453.5	3638.3	5200.7	

Складемо систему рівнянь поправок у виміряні псевдодальності у вигляді:

$$-e_{x,j}^k dX_j - e_{y,j}^k dY_j - e_{z,j}^k dZ_j + b_j + l_\rho = v_\rho, \quad j = 1, \quad k = 5. \quad (33)$$

Тут $d\mathbf{R}_j = (dX_j, dY_j, dZ_j)^T$ - вектор поправок в попередні координати пункту спостережень $\mathbf{R}_j^0 = (X_j^0, Y_j^0, Z_j^0)^T$, $e_{x,j}^k, e_{y,j}^k, e_{z,j}^k$ - направляючі косинуси

топоцентричних напрямків на супутник, що визначаються за формулами (29), (30), b_j - вклад зсуву шкали годин приймача в псевдодальностей. Отримані коефіцієнти і вільні члени заносимо в таблиці 2.9; стовпець для v_ρ поки не заповнюється.

Таблиця 2.9 – Коефіцієнти і вільні члени рівнянь спостережень

№ пут.	Дальність $(\rho_j^k)^0$	$-e_{X,j}^k$	$-e_{Y,j}^k$	$-e_{Z,j}^k$	1	l_ρ (км)	v_ρ (м)
	23 062.238	0.76824	-0.04786	-0.63838	1	0.129	-0.6
	24 786.955	0.77767	0.38921	-0.49370	1	-0.081	0.3
	23 117.888	-0.64536	0.34792	-0.68002	1	-0.545	-0.05
	21 990.101	-0.71805	-0.54408	-0.43399	1	-0.352	-0.06
	20 994.119	0.43894	-0.48645	-0.75546	1	0.225	0.3

Введемо позначення:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -l_j^1 & -m_j^1 & -n_j^1 & 1 \\ -l_j^2 & -m_j^2 & -n_j^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_j^5 & -m_j^5 & -n_j^5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \end{bmatrix}, \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_{\rho_j^1} \\ l_{\rho_j^2} \\ \dots \\ l_{\rho_j^5} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \\ b_j \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_5 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

тоді систему рівнянь (33) можна записати в матричному вигляді:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{l} = \mathbf{v}. \quad (35)$$

Оскільки отримана система рівнянь поправок є перевизначена (5 рівнянь при 4-х невідомих), то рішення виробляється по МНК по умовою $[\nu\nu] = \min$. Для цього складається система нормальних рівнянь:

$$\mathbf{NX} + \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

де

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (37)$$

Складаємо систему нормальних рівнянь.

$$\begin{aligned}
[aa] &= 2.31972 & [ab] &= 0.21853 & [ac] &= -0.45548 & [ad] &= 0.62144 & [al] &= 0.73935 \\
[bb] &= 0.80748 & [bc] &= 0.20543 & [bd] &= -0.34126 & [bl] &= -0.14525 \\
[cc] &= 1.87276 & [cd] &= 3.00155 & [cl] &= 0.31103 \\
[dd] &= 5 & [dl] &= -0.625
\end{aligned}$$

Рішення системи нормальних рівнянь проводиться будь-яким відомим студенту методом (визначників, виключення невідомих методом Гаусса-Дулітл, звернення матриці коефіцієнтів і т.п.). Формально рішення системи в матричному вигляді записується таким чином:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{L}, \quad (38)$$

де \mathbf{N}^{-1} - зворотна по відношенню до матриця. Для прикладу отримано:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2.31972 & 0.21853 & -0.45548 & 0.62144 \\ 0.21853 & 0.80748 & 0.20543 & -0.34126 \\ -0.45548 & 0.20543 & 1.87276 & -3.00155 \\ 0.62144 & -0.34126 & -3.00155 & 5.00000 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.73935 \\ 0.14525 \\ 0.31103 \\ 0.62500 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.48558 & -0.16199 & 0.56580 & 0.26825 \\ -0.16199 & 1.32925 & -0.19897 & -0.00859 \\ 0.56580 & -0.19897 & 14.76383 & 8.77897 \\ 0.26825 & -0.00859 & 8.77897 & 5.43618 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.2968 \\ 0.2348 \\ 0.7676 \\ 0.5997 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо координати пункту:

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j^0 + d\mathbf{R}_j \quad (39)$$

і зрушення шкали годин приймача:

$$dt_j = b_j / c, \quad (40)$$

де $c = 299792.458$ км/с - швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі.

$$\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} 453.5 \\ 3638.3 \\ 5200.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2698 \\ 0.2348 \\ 0.7676 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 453.2032 \\ 3638.5348 \\ 5201.4676 \end{bmatrix}, \quad dt_j = 1.9985 \text{ мкс.}$$

Оцінка точності визначення координат польового приймача і часу обчислюються поправки v_p у виміряні псевдодальності з використанням формули (31), і по ним знаходиться середня квадратична помилка одиниці ваги:

$$\mu = \sqrt{[vv] / (n - k)}, \quad (41)$$

де n - число вимірювань, k - число невідомих.

Для оцінки точності координат і часу на пункті j знаходиться кореляційна матриця $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$. Тоді середні квадратичні помилки визначення координат m_x , m_y , m_z та часу m_T можна знайти за формулами:

$$m_x = \mu \sqrt{q_{11}}, \quad m_y = \mu \sqrt{q_{22}}, \quad m_z = \mu \sqrt{q_{33}}, \quad m_T = \frac{\mu}{c} \sqrt{q_{44}}, \quad (42)$$

а повна помилка положення пункту знаходиться за формулою:

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \mu \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33}} = \mu \cdot PDOP. \quad (43)$$

Величина PDOP (Position Delution of Precision - позиційне пониження точності), звана геометричним фактором, характеризує вплив геометрії мережі, то-єсть взаємного розташування сузір'я супутників і пункту на точність визначення координат абсолютним методом. Зазвичай ця точність недостатньо висока для геодезичного застосування через помилки ефемерид супутників, неврахованого впливу тропосфери, іоносфери, режиму SA зашумлення GPS та інших джерел помилок. При диференціальному визначенні координат пунктів, коли ряд помилок однаковим чином спотворює координати та базової і польового приймачів (корельовані помилки) точність визначення значно підвищується і залежно від типу апаратури може досягати 0.5 - 2.0 м.

У прикладі отримано: $\mu = 0.68$ м, $PDOP = \sqrt{0.48 + 1.33 + 14.76} = 4.07$, $M = 2.77$ м, $m_T = 5.3$ нс.

Обчислення диференціальних поправок за результатами вимірювань на базовій станції

Істинні координати базової станції в системі WGS-84 відомі в формі геодезичних координат $B_{i,84}, L_{i,84}, H_{i,84}$, а отримані зі спостережень – у формі декартових координат $X_{i,84}, Y_{i,84}, Z_{i,84}$. Для обчислення диференціальних поправок перетворимо геодезичні координати базової станції в прямокутні:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H_i) \cos B_i \cos L_i \\ (N + H_i) \cos B_i \sin L_i \\ [N(1 - e^2) + H_i] \sin B_i \end{bmatrix}, \quad (44)$$

Тут N – радіус кривизни еліпсоїда WGS-84 в першому вертикалі:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}}. \quad (45)$$

Диференціальні поправки знайдемо так:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ \tilde{Z}_i \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Для базової станції маємо:

i	56°21'1 5.33"	2	6378.13 7 км	i	479.5695 км
i	82°13'0 7.98"		6.69438· 10 ⁻³	i	3509.5448 км
i	155.21 м		6 392.9837 км	i	5286.5277 км

$X_i = 479.5034, Y_i = 3509.4215, Z_i = 5286.6301, \Delta X = 0.0661, \Delta Y = 0.1233, \Delta Z = -0.1024.$

Виправлення координат польового приймача. На практиці поправки передаються від базової станції до польового приймачу або при пост-обробці, або по радіоканалу в реальному часі (режим DGPS).

$$\begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_j \\ \tilde{Y}_j \\ \tilde{Z}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Виправляємо координати польового приймача:

	2	453.203		5348	3638.	2	5201.467
X_j	0.0661		Y_j	0.1233		Z_j	0.1024
	3	453.269		6581	3638.		5201.365
j			j			j	

Перетворення координат пункту із системи WGS-84 в систему координат користувача і перехід від прямокутних координат до геодезичних

Переклад координат із системи WGS-84 в іншу координатну систему, припустимо, в систему СК-42, виконується за формулою:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{СК42} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & m & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS}. \quad (48)$$

де $\mathbf{T} = (T_X, T_Y, T_Z)^T$ - вектора переносу, тобто початку координат системи СК-42 в систему WGS-84, $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ - малі кути обертання, виражені в радіанній мірою, m - малий скаляр, що характеризує відмінність від одиниці відносини одного і того ж елемента довжини в різних системах (масштабний коефіцієнт). Перетворимо координати приймача, дотримуючись розмірності кутових і лінійних величин:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{СК-42} &= \begin{bmatrix} 453.2693 \text{ км} \\ 3638.6581 \text{ км} \\ 5201.3652 \text{ км} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25.52 \text{ м} \\ 126.59 \text{ м} \\ 78.84 \text{ м} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.89 \cdot 10^{-6} & 0.627 / \rho & -0.089 / \rho \\ -0.627 / \rho & 0.89 \cdot 10^{-6} & 0.165 / \rho \\ 0.089 / \rho & -0.165 / \rho & 0.89 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 453 \text{ км} \\ 3639 \text{ км} \\ 5201 \text{ км} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 453.2693 \text{ км} \\ 3638.6581 \text{ км} \\ 5201.3652 \text{ км} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25.52 \text{ м} \\ 126.59 \text{ м} \\ 78.84 \text{ м} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.40 + 11.06 - 1.57) \text{ м} \\ (-1.38 + 3.24 + 5.11) \text{ м} \\ (0.19 - 2.91 + 4.63) \text{ м} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 453.2567 \text{ км} \\ 3638.7917 \text{ км} \\ 5201.4460 \text{ км} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При переході від прямокутних координат до геодезичних довгота визначається за формулою:

$$L = \arctan \frac{Y}{X}, \quad (49)$$

а широту можна обчислити ітеративним методом:

$$B^{(i)} = \arctan \frac{Z + N^{(i-1)} e^2 \sin B^{(i-1)}}{r}, \quad (50)$$

Тут – номер ітерації, які повторюються, поки $|B^i - B^{(i-1)}| \geq \varepsilon$ (ε -точність обчислень); r - радіуса паралелі пункту:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (51)$$

а величина $N^{(i-1)}$ знаходиться за широтою з попереднього наближення. В початковому наближенні вважаємо:

$$B^{(0)} = \arctan(Z / r). \quad (52)$$

Еліпсоїдальної висоти H визначається за формулою:

$$H = \frac{Z}{\sin B} - N(1 - e^2). \quad (53)$$

r	3666.9123	$B^{(2)}$	54.99795°	B	54°59'52.627"
$B^{(0)}$	54.81695°	$B^{(3)}$	54.997952	L	82°53'58.81"
$B^{(1)}$	54.99755°	$B^{(4)}$	54.997952	H	124.2 м

Для переходу від еліпсоїдальної висоти H до нормального H^γ (над квазігеоїда) необхідно врахувати висоту квазігеоїда над еліпсоїдом ζ на місці спостереження польовим приймачем:

$$H_j^\gamma = H_j - \zeta_j. \quad (54)$$

Отримуємо: $H^\gamma = 124.2 \text{ м} - (-31.25 \text{ м}) = 155.45 \text{ м}$.

Точність нормальної висоти залежить не тільки від точності визначення еліпсоїдальної висоти GPS-приймачем, а й від вивченості геоїда в районі робіт.

3 САМОСТІЙНА РОБОТА

Питання для самостійного вивчення

Доповненням змісту теоретичного лекційного матеріалу та практичних робіт є самостійна робота студентів. Оцінка самостійної роботи здійснюється за підготовленими студентами доповідями на основі рекомендованих літературних і картографічних джерел.

Таблиця 3.1 – Перелік питань та літератури для самостійного вивчення дисципліни

Питання для самостійного вивчення	Література
1. Предмет і задачі супутникової геодезії	Основна: 1, 4 Додаткова: 2, 4
2. Зоряні (небесні) системи координат	Основна: 2, 4, 6 Додаткова: 4
3. Географічні (земні) системи координат	Основна: 3, 4 Додаткова: 2, 4
4. Системи часу	Основна: 1, 2, 6 Додаткова: 4
5. Рух штучних супутників Землі в просторі	Основна: 5, 6, 7 Додаткова: 2, 5
6. Кеплеровий незбурений рух	Основна: 2, 3, 6 Додаткова: 4
7. Орбітальна система координат	Основна: 2, 3, 6 Додаткова: 4
8. Рух супутника в гравітаційному полі Землі	Основна: 2, 3, 6 Додаткова: 4
9. Обчислення ефемерид руху супутника	Основна: 4, 7 Додаткова: 5
10. Техніка і методи спостережень супутників	Основна: 1, 3, 4 Додаткова: 4
11. Фотографічні методи спостережень супутників	Основна: 1, 3, 4 Додаткова: 1, 5
12. Обробка матеріалів фотографічних спостережень супутників	Основна: 1, 4, 6 Додаткова: 3, 5
13. Радіотехнічні методи спостережень супутників	Основна: 1, 4, 6 Додаткова: 3, 5
14. Лазерні спостереження ШСЗ	Основна: 3, 4, 6 Додаткова: 1, 2, 3
15. Супутники та супутникові системи	Основна: 1, 2, 7 Додаткова: 1, 2, 5

16. Геометричні методи супутникової геодезії	Основна: 4, 6 Додаткова: 4
17. Супутникова векторна мережа	Основна: 1, 4, 6 Додаткова: 1, 2
18. Супутникова тріангуляція	Основна: 3, 4, 5 Додаткова: 1, 5
19. Принципи використання доплерівських спостережень для визначення координат станції спостережень	Основна: 3, 4, 6 Додаткова: 4
20. Комбіновані супутникові побудови	Основна: 2, 3, 4 Додаткова: 1, 4, 5
21. Принципи спільної обробки супутникових та наземних мереж	Основна: 5, 6, 7 Додаткова: 1, 3, 5
22. Масштабування супутникових мереж	Основна: 3, 4 Додаткова: 4
23. Динамічні методи супутникової геодезії	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
24. Спільне використання супутникових, гравіметричних та астрономо-геодезичних даних для визначення фігури Землі і її гравітаційного поля	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
25. Відомості з історії створення глобальних навігаційних супутникових систем	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
26. Основні концепції глобальних супутникових систем	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
27. Будова системи NAVSTAR GPS	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
28. Передавачі супутникової системи GPS	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
29. Наземні приймачі системи GPS	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
30. Технології спостережень відносним статичним методом	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
31. Основні джерела помилок GPS-спостережень	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
32. Проектування та організація робіт при створенні або згущенні геодезичних мереж з допомогою приймачів GPS	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
33. Перспективи використання GPS	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
34. Геодезичні можливості геометричного супутникового методу	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5
35. Принципи нових методів супутникової геодезії	Основна: 4, 7 Додаткова: 1, 3, 5

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Соловьев Ю. А. Системы спутниковой навигации. / Ю. А. Соловьев. – Москва: Эко-Трендз, 2000. – 267 с.
2. Генике А. А. Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии / А. А. Генике, Г. Г. Побединский. – Москва: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2004. – 355 с.
3. Серапинас Б. Б. Основы спутникового позиционирования / Б. Б. Серапинас. – Москва: ИКФКаталог, 2002. – 106 с.
4. Яценков В. С. Основы спутниковой навигации. Системы GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС / В. С. Яценков. – Москва: Горячая линия – Телеком, 2005. – 272 с.
5. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. Т.1. Монография / К. М. Антонович. – Москва: ФГУП Картгеоцентр, 2005. – 334 с.
6. Карлащук В. И. Спутниковая навигация. Методы и средства / В. И. Карлащук, С. В. Карлащук. – Москва: СОЛОН-Пресс, 2006. – 176 с.
7. Урмаев М. С. Орбитальные методы космической геодезии / М. С. Урмаев. – Москва: Недра, 1981. – 256 с.
8. Марков В. І. Основи космічної геодезії / В. І. Марков. – Кіровоград: ДЛАУ, 2002. – 236 с.

СПИСОК ДОДАТКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонович К. М. Методические указания, программа і контрольная работа по курсу «Космическая геодезия» / К. М. Антонович. – Новосибирск: СМДА, 1999. – 26 с.
2. Леотьев В. К. GPS: Все, что Вы хотели знать, но боялись спросить. Неофициальное пособие по глобальной системе местопределения / В. К. Леотьев. – Москва: Бук–Пресс, 2006. – 352 с.
3. Найман В. С. GPS-навигаторы для путешественников, автомобилистов, яхтсменов = Лучшие GPS – навигаторы / В. С. Найман. Под науч. ред. В. В. Скрылева. – Москва: НТ Пресс, 2002. – 400 с.
4. Пилип'юк Р. Г. Супутникова геодезія: лабораторний практикум / Р. Г. Пилип'юк, Р. Р. Пилип'юк. – Івано-Франківськ: Факел, 2009. – 67 с.
5. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В. С. Шебшаевич, П. П. Дмитриев, Н. В. Иванцевич и др.: Под ред. В. С. Шебшаевича. – Москва: Радио и связь, 1993. – 408 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки і завдання
до лабораторних, самостійних та розрахунково-графічних робіт
з дисципліни

«СУПУТНИКОВА ГЕОДЕЗІЯ ТА СФЕРИЧНА АСТРОНОМІЯ»

*(для студентів денної і заочної форм навчання напряму підготовки
6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій)*

Укладач **ОТЕЧКО** Сергій Анатолійович

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. А. Отечко*

План 2015, поз. 46 М

Підп. до друку 24.06.2016

Формат 60×84/16

Друк на ризографі

Ум. друк. арк. 2,4

Зам. №

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.